ISSN 2658-5014 (Print)
2023. Т. 5, № 1 (10). С. 34–40
СИИТ
СИСТЕМНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
ISSN 2686-7044 (Online)
http://siit.ugatu.su

УДК 004.65
DOI 10.54708/2658-5014-SIIT-2023-no1-p34

Особенности задач-триплетов в задаче упаковки

А. Р. Усманова, Ю. И. Валиахметова

Аннотация. Современный период развития производственных технологических процессов характеризуется оптимизацией этапов жизненного цикла продукции, обусловленной динамически изменяющимся ассортиментом и номенклатурой изделий при ужесточении требований к себестоимости продукции. В этих условиях актуальным является решение оптимизационных задач упаковки и раскроя. Рассматривается одномерная задача упаковки – Bin Packing Problem, являющаяся NP-трудной. Данная статья посвящена особенностям применения простых эвристических алгоритмов упаковки к задачам специального типа – триплетам и сравнение с обычными равномерными задачами. Рассматривается алгоритм, представляющий собой недетерминированную версию простейшего алгоритма «первый подходящий». В предлагаемом алгоритме очередной предмет из отсортированного по убыванию списка предметов помещается в самый заполненный подходящий контейнер с заданной вероятностью. Под триплетами понимаются задачи, в которых все веса предметов близки к трети веса контейнера. С одной стороны, известно, что такие задачи являются достаточно сложными, с другой – в численном эксперименте использовались задачи из электронной библиотеки с заранее известным оптимальным значением целевой функции. Авторами продемонстрировано существенно разное поведение алгоритма при решении задач-триплетов и обычных (т. н. равномерных задач). В вычислительном эксперименте показано, что если для равномерных задач стратегия «первый подходящий» позволяет добиться результатов близких к оптимальному, то для триплетов это не так. В случае триплетов качество решения улучшается обратно пропорционально вероятности применения правила «первый подходящий». Кроме того, в вычислительном эксперименте продемонстрировано усиление описанного эффекта при увеличении числа запуска задач.

Ключевые слова: задачи-триплеты, раскрой, упаковка, оптимизация, эвристический, эксперимент.

Введение

Как известно, задачи упаковки и раскроя относятся к классу целочисленных задач математического программирования. Классические методы линейного программирования решения задач упаковки и раскроя, успешно применяемые в условиях массового производства, в условиях единичного производства трудно применимы.

Пусть задано множество $L = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ весов предметов и число C – вместимость контейнера. В задаче упаковки требуется найти разбиение L на минимальное число таких непересекающихся подмножеств, что сумма весов предметов в каждом не превосходит C. Доказано, что эта задача является NP-трудной [1]. Приведем одну из математических формулировок оптимизационной задачи [2].

Задача 1. Заданы множество $L = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ весов предметов и n контейнеров емкости C. Сопоставим каждый предмет одному контейнеру таким образом, чтобы вес предметов в каждом контейнере не превышал число C и число использованных контейнеров было минимальным. Полагаем, что контейнер, которому сопоставлен хотя бы один предмет, используется, в противном случае он не используется.

$$y_i \in \{0,1\}, i \in N = \overline{1,n},$$

где

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{если контейнер } i \text{ используется}, \\ 0, \quad \text{иначе}; \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, i, j \in N,$$

где
$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если предмет } i \text{ сопоставлен} \\ \text{котнейнеру } j, \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

Минимизировать $z = \sum_{j=1}^{n} y_j$, при условиях, что $\sum_{i=1}^{n} y_j x_{ij} w_i \leq C, \forall j \in N$ и $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$, $\forall j \in N$.

Описание тестовых задач. Для экспериментов использовались 8 тестовых наборов задач из электронной OR-библиотеки, предложенных Фолкнером [5], в каждом наборе имеются 20 случайным образом сгенерированных задач, объединенных общими характеристиками исходных данных. В таблице 1 приведены эти характеристики для каждого набора. Здесь в колонке 1 — номер тестового набора, в колонке 2 — число предметов n, в колонке 3 — емкость контейнера C, в колонке 4 — интервал, содержащий веса предметов.

Таблица 1

Характеристики тестовых задач

№	n	C	Интервал
1	2	3	4
1	120	150	[20,100]
2	250	150	[20,100]
3	500	150	[20,100]
4	1000	150	[20,100]
5	60	100.0	[20.0,50.0]
6	120	100.0	[20.0,50.0]
7	249	100.0	[20.0,50.0]
8	501	100.0	[20.0,50.0]

Данные тестовые задачи являются достаточно сложными, и решения, получаемые простыми эвристическими алгоритмами, в большинстве случаев далеки от оптимального. Как указал Вэшер [6], основными факторами, делающими задачу «трудной», являются:

- размерность задачи;
- среднее значение весов предметов по отношению к емкости контейнера;
- величина интервала, содержащего веса предметов.

Число предметов в данных задачах достаточно велико, чтобы с уверенностью считать тесты сложными. По сравнению с тестами Мартелло и Тота [2] или Шверина и Вэшера [6] здесь предложены задачи с гораздо большей размерностью n = 500 и n = 1000, тогда как в отмеченных работах рассматривались задачи с максимальной размерностью n = 200.

Задача является тем сложнее, чем ближе среднее значение весов предметов к трети контейнера и меньше интервал весов предметов. Последние 4 тестовых набора относятся к так называемым триплетам и считаются очень сложными.

Для всех задач известны решения, полученные Фолкнером с помощью генетического алгоритма. Почти во всех случаях эти решения являются заведомо оптимальными, так как совпадают с нижней границей $N_0 = \left\lceil \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{C} \right\rceil$.

Авторами были проведены численные эксперименты, в которых в качестве оценки решения, получаемого алгоритмом, используется среднее для 20 задач из какого-либо набора отклонение от наилучшего известного решения. Для того, чтобы дать представление о величине относительного отклонения и для характеристики задач в целом в таблице 2 приведены средние для каждого набора значения, полученные Фолкнером, т. е. значения целевой функции – число контейнеров. Для триплетов из одного набора число контейнеров одинаково, так как эти тестовые задачи были сгенерированы так, чтобы в оптимальном решении каждому контейнеру были сопоставлены ровно три предмета. Для других же наборов оптимальные решения разных задач могут отличаться на несколько (<= 10) контейнеров друг от друга.

Таблица 2

Средние значения наилучшего известного числа контейнеров в тестовых задачах

Номер тестового набора	Среднее число контейнеров
1	49,150
2	101,700
3	201,200
4	400,550
5	20,000
6	40,000
7	83,000
8	167,000

Алгоритм RPP

Известно множество простых эвристических алгоритмов для решения задачи упаковки – так называемые алгоритмы Any Fit — первый подходящий, наилучший подходящий, худший подходящий, кроме того, семейство групповых алгоритмов и множество иных. Опишем широко используемый алгоритм FFD: каждый предмет из отсортированного по невозрастанию веса списка предметов сопоставляется контейнеру с наименьшим индексом с подходящей остаточной емкостью. В случае отсутствия такого контейнера заводится новый контейнер. Авторы здесь рассматривают недетерминированный алгоритм – «случайная перестановка с параметром» (RPP, Random Permutation with Parameter). Этот и похожие алгоритмы были подробно описаны в работах [7, 8]. Приведем здесь только краткое описание. Алгоритм формирует некоторую случайную последовательность номеров предметов и затем применяет к ней алгоритм FF. Сначала предметы сортируются в порядке невозрастания их весов. Затем в процессе упаковки, рассматривая очередной предмет, алгоритм сравнивает заданный параметр p со значением псевдослучайной величины, равномерно распределенной на [0,1]. Предмет будет упакован только в том случае, если параметр p больше этой случайной величины. Процесс продолжается до тех пор, пока все предметы не будут упакованы.

Опишем схему работы алгоритма RPP с параметром $p \in (0;1]$ – вероятности, с которой очередной предмет будет упакован. Предполагается, что заданы исходные данные (задача 1), предметы упорядочены по невозрастанию весов, m – число упакованных предметов.

Алгоритм RPP (p)

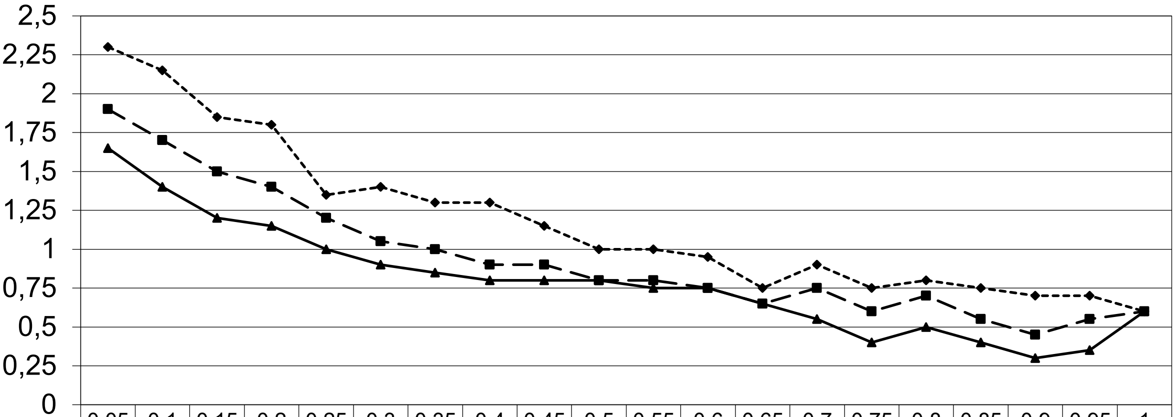
1. Положить $m = 0$.
2. Для i от 1 до $\underline{n}$ повторять шаг 3
3. если i-й предмет еще не упакован, то
   если $\gamma < p$, то
      3.1 упаковать предмет по правилу FFD.
      3.2 $m = m + 1$.
4. если $m < n$, то шаг 2,
   иначе стоп.

Поскольку параметр p не зависит от размерности задачи, временная сложность алгоритма совпадает со сложностью FFD и равна $O\,(n \log n)$.

Вычислительный эксперимент

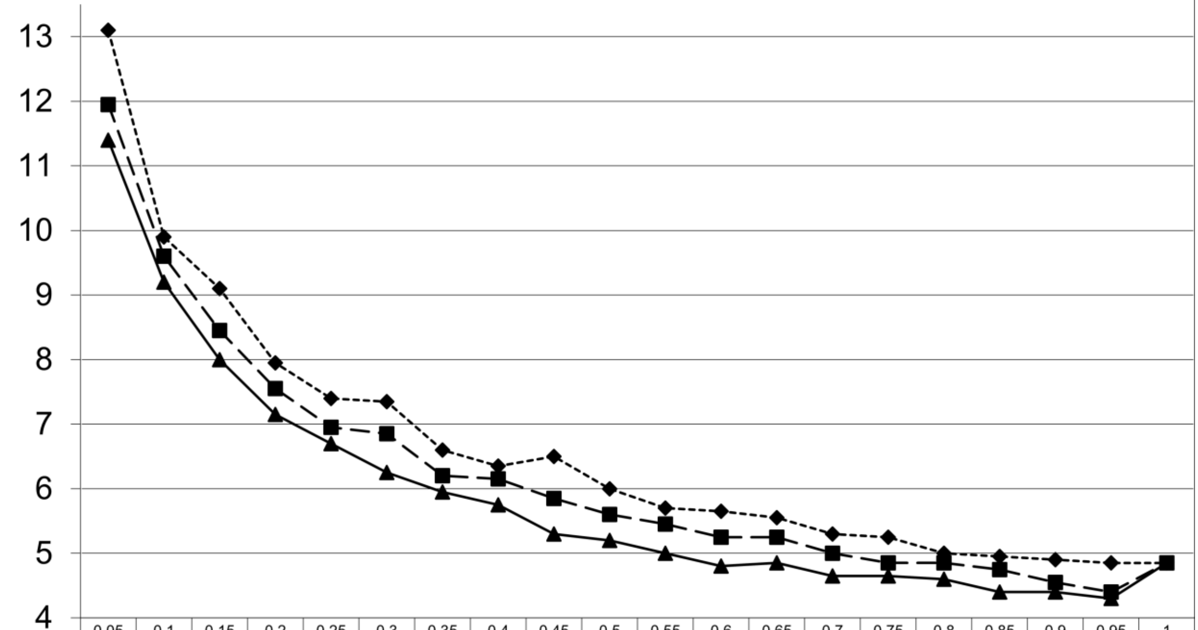
Целью данного эксперимента являлось выяснение качества работы алгоритма «случайная перестановка с параметром» (RPP) в зависимости от параметров p – вероятности упаковки предмета на очередном шаге и k – числа запусков алгоритма. Значения k принимались равными 10, 100 и 1000. Значения параметра p брались от 0,05 до 1,00 с шагом 0,05. В качестве оценки качества алгоритма рассматривалось для каждой задачи абсолютное отклонение значения целевой функции z от известного наилучшего значения z^* $av_i = z - z_i^*, i = 1..20$.

На диаграммах (рисунки 1–4) по оси абсцисс отложены значения параметра p, а по оси ординат – среднее для 20 задач отклонение $\overline{av} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} av_i$.



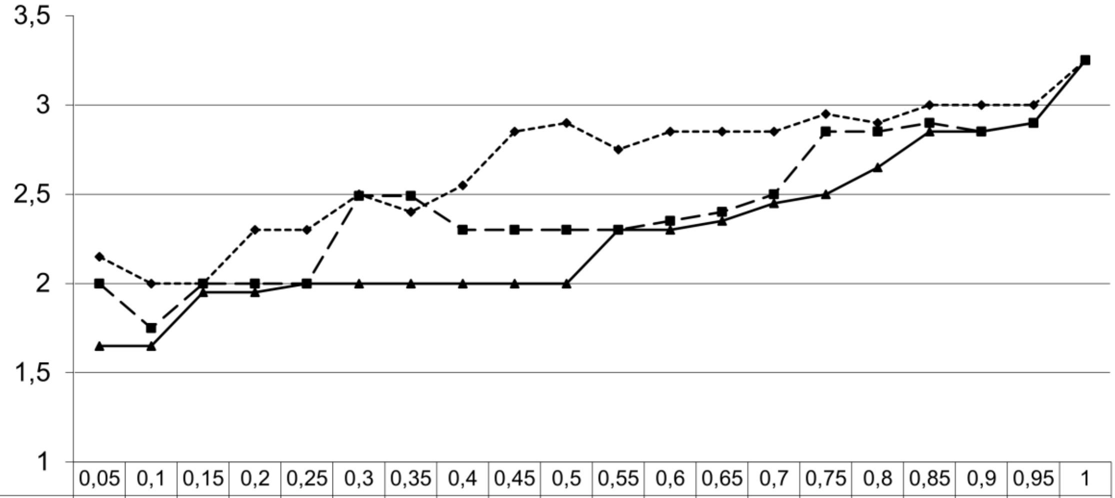
	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
k=10	2,3	2,15	1,85	1,8	1,35	1,4	1,3	1,3	1,15	1	1	0,95	0,75	0,9	0,75	0,8	0,75	0,7	0,7	0,6
k=100	1,9	1,7	1,5	1,4	1,2	1,05	1	0,9	0,9	0,8	0,8	0,75	0,65	0,75	0,6	0,7	0,55	0,45	0,55	0,6
k=1000	1,65	1,4	1,2	1,15	1	0,9	0,85	0,8	0,8	0,8	0,75	0,75	0,65	0,55	0,4	0,5	0,4	0,3	0,35	0,6

Рис. 1 Среднее абсолютное отклонение значения целевой функции RPP от оптимума. Тестовый набор 1



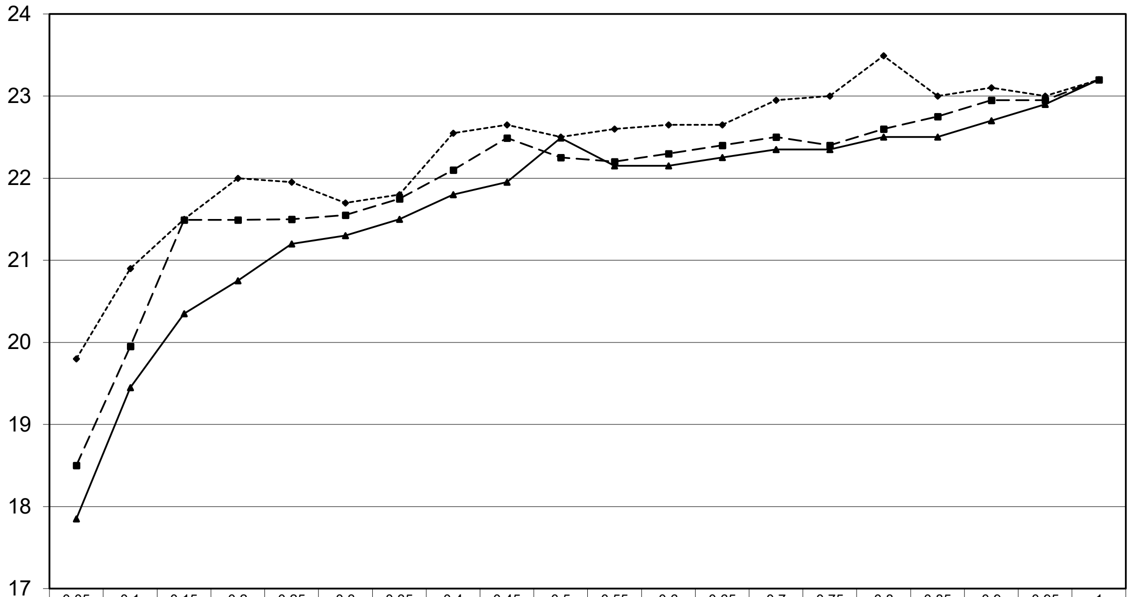
	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
k=10	13,1	9,9	9,1	7,95	7,4	7,35	6,6	6,35	6,5	6	5,7	5,65	5,55	5,3	5,25	5	4,95	4,9	4,85	4,85
k=100	11,95	9,6	8,45	7,55	6,95	6,85	6,2	6,15	5,85	5,6	5,45	5,25	5,25	5	4,85	4,85	4,75	4,55	4,4	4,85
k=1000	11,4	9,2	8	7,15	6,7	6,25	5,95	5,75	5,3	5,2	5	4,8	4,85	4,65	4,65	4,6	4,4	4,4	4,3	4,85

Рис. 2 Среднее абсолютное отклонение значения целевой функции RPP от оптимума. Тестовый набор 4



	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
k=10	2,15	2	2	2,3	2,3	2,5	2,4	2,55	2,85	2,9	2,75	2,85	2,85	2,85	2,95	2,9	3	3	3	3,25
k=100	2	1,75	2	2	2	2,49	2,49	2,3	2,3	2,3	2,3	2,35	2,4	2,5	2,85	2,85	2,9	2,85	2,9	3,25
k=1000	1,65	1,65	1,95	1,95	2	2	2	2	2	2	2,3	2,3	2,35	2,45	2,5	2,65	2,85	2,85	2,9	3,25

Рис. 3 Среднее абсолютное отклонение значения целевой функции RPP от оптимума. Тестовый набор 5.



	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
k=10	19,799	20,899	21,5	22	21,95	21,7	21,799	22,549	22,649	22,5	22,6	22,649	22,649	22,95	23	23,49	23	23,1	23	23,2
k=100	18,5	19,95	21,49	21,49	21,5	21,549	21,75	22,1	22,49	22,25	22,2	22,299	22,399	22,5	22,399	22,6	22,75	22,95	22,95	23,2
k=1000	17,85	19,45	20,35	20,75	21,2	21,299	21,5	21,799	21,95	22,49	22,149	22,149	22,25	22,35	22,35	22,5	22,5	22,7	22,899	23,2

Рис. 4 Среднее абсолютное отклонение значения целевой функции RPP от оптимума. Тестовый набор 8

Пунктирной горизонтальной линией на диаграмме отмечено значение целевой функции при решении задачи методом FFD. Таким образом, точки лежащие выше этой прямой означают решения худшие, чем решения FFD, а лежащие ниже – решения, превосходящие решения FFD. В данной работе для демонстрации существенного различия поведения алгоритма при решении равномерных задач (тестовые наборы 1–4) и триплетов (наборы 5–8) приведены не все диаграммы, а только диаграммы для наборов 1, 4, 5 и 8. Качественно картина для остальных наборов остается такой же.

Как видно из приведенных диаграмм, качество решений алгоритма RPP прямо пропорционально числу запусков k для всех тестовых наборов. Зависимость эффективности алгоритма от второго параметра p, очевидно, существенно разная для тестовых наборов 1–4 и наборов триплетов 5–8.

Если для первых наилучшие значения отклонения от оптимума получаются при $p \in (0{,}8;\ 0{,}95)$ и чем меньше значение p, тем хуже результат работы алгоритма, то для триплетов все как раз наоборот.

Заключение

Как видно из приведенных результатов, равномерные задачи и задачи триплеты являются существенно разными. В частности, можно без преувеличений сделать следующий вывод – для равномерных задач привнесение стохастики хотя и дает положительный эффект по сравнению с алгоритмом FFD, но он не столь велик, как для задач-триплетов. Алгоритм FFD в целом плохо приспособлен для получения близких к оптимальному решений для задач-триплетов. В задачах-триплетах чем меньше вероятность предмету быть упакованным по правилу FFD, тем лучше значение целевой функции. При этом при увеличении размерности задачи данный эффект проявляется сильнее.

Наилучшие значения среднего отклонения достигаются при весьма малых значениях $p \in (0{,}05;\ 0{,}30)$ и при возрастании p эффективность алгоритма ухудшается. Кроме того, интересным является тот факт, что на первых четырех тестах алгоритм RPP получает решения хуже, чем FFD при $p < 0{,}5–0{,}7$, а при решении триплетов решения RPP всегда лучше. С учетом вышесказанного ясно, что значение p надо выбирать, исходя из характеристик исходной задачи.

Список литературы / References

1. Garey M. R. and Johnson D. S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. W. H. Frecman, San Francisco. 1979.
2. Martello S.,Toth P. Knapsack Problems, Algorithms and Computer Implementations. John Wiley and Sons Ltd.- England, 1990.
3. Аничкин А. С., Семенов В. А. Математическая формализация задач проектного планирования в расширенной постановке // Труды ИСП РАН. 2017. Т. 29. Вып. 2. С. 231–256. [[Anichkin A. S., Semenov V. A., “Mathematical formalization of project planning problems in an extended formulation”, (in Russian). In: Works of ISP RSA, vol. 29, no 2, 2017, pp. 231-256.]]
4. Scholl A., Klein R., Jurgens C. Bison, “A fast hybrid procedure for exactly solving the one-dimensional bin-packing problem”. Computers Ops. Res. 1997, vol. 24, no. 7, pp. 627-645.
5. Falkenauer E., “A hybrid grouping genetic algorithm for bin packing”. Journal of Heuristics, 1996, vol. 2, no 1, pp. 5-30.
6. Wascher G, Gau T., “Heuristics for the integer one-dimensional cutting stock problem: a computational study”. OR Spectrum, 1996, vol. 18, pp. 131–144.
7. Усманова А. Р. Вероятностные жадные эвристики для задачи упаковки в контейнеры // Оптим-2001: Сб. докл. Первой Всероссийской научно-практической конференции по вопросам решения оптимизационных задач в промышленности. СПб, 2001. С. 141–145. [[Usmanova A. R. “Probabilistic Heuristics for the container packing problem”, (in Russian). In: Collection of Reports Optim-2001: The First All-Russian Scientific and Practical conference on the optimization problem in industry solution, St.-Petersburg, 2001, pp. 141-145.]]
8. Кочетов Ю. А., Усманова А. Р. Вероятностный поиск с запретами для задачи упаковки в контейнеры // Сб. докл. XII Байкальской международной конференции. Иркутск, 2001. С. 22–27. [[Kochetov. Yu. A., Usmanova A. R., “Probabilistic search with prohibitions for the problem of packing into containers”, (in Russian). In: XII Baikal International Conference, Irkutsk, 2001, pp. 22-27.]]

Поступила в редакцию 12 апреля 2023 г.

Метаданные / Metadata

Title: Features of Triplet Problem in the Packaging Problem.

Abstract: The modern period of development of production technological processes is characterized by the optimization of the stages of the product life cycle, due to the dynamically changing assortment and product range with stricter requirements for the cost of production. In these conditions, the solution of optimization problems of packing and cutting is actual. The one–dimensional Bin Packing Problem, which is NP-hard, is considered. This article is devoted to the peculiarities of applying simple heuristic packing algorithms to problems of a special type – triplets and comparison with ordinary uniform problems. The algorithm is considered, which is a non-deterministic version of the simplest algorithm "the first fit". In the proposed algorithm, the next item from the list of items sorted in descending order is placed in the most filled fit container with a given probability. Triplets are understood as tasks in which all the weights of objects are close to a third of the weight of the container. On the one hand, it is known that such problems are quite complex, on the other hand, problems from an electronic library with a pre-known optimal value of the objective function were used in the numerical experiment. The authors have demonstrated significantly different behavior of the algorithm when solving problems-triplets and ordinary (so-called uniform problems). In a computational experiment, it is shown that if for uniform problems the "first suitable" strategy allows achieving results close to optimal, but this is not true for triplets. In the case of triplets, the quality of the solution improves inversely proportional to the probability of applying the "first suitable" rule. In addition, the computational experiment demonstrated the amplification of the described effect with an increase in the number of task launches.

Key words: triplet tasks, cutting, packing, optimization, heuristic, experiment.

Язык статьи / Language: русский / Russian.

Об авторах / About authors:

Усманова Анжелика Рашитовна
ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», Россия.
Доцент каф. вычислительной математики и кибернетики.
Дипл. инж.-программист (Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, 1997). Канд. физ.-мат. наук (Башкирск. гос. ун-т, 2002). Иссл. в обл. эврист. алгоритмов задач дискр. оптимизации.
E-mail: kfmn2004@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9306-8826
URL: https://elibrary.ru/author_items.asp?authorid=132357

Валиахметова Юлия Ильясовна
ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», Россия.
Доцент каф. вычислительной математики и кибернетики.
Дипл. инж. (Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, 2004). Канд. техн. наук по мат. моделированию, числ. методам и комплексам программ (там же, 2008). Иссл. в обл. эвристических алгоритмов решения задач дискретной оптимизации.
E-mail: julikas@inbox.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3897-118x
URL: https://elibrary.ru/author_items.asp?authorid=734538

Usmanova Angelika Rashitovna
Ufa University of Science and Technology, Russia.
Ass. Prof., Dept. Computational Mathematics and Cybernetics.
Dipl. Eng.-programmer (Ufa State Aviation Technical University, 1997). Candidate of Phys.-Math. Science (Bashkir State University, 2002).
E-mail: kfmn2004@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9306-8826
URL: https://elibrary.ru/author_items.asp?authorid=132357

Valiakhmetova Juliya Ilyasovna
Ufa University of Science and Technology, Russia.
Ass. Prof., Dept. Computational Mathematics and Cybernetics.s
Dipl. Engineer (Ufa State Aviation Technical University, 2004).
Candidate of Tech. Sci. (Ufa State Aviation Technical University, 2008).
E-mail: julikas@inbox.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3897-118x
URL: https://elibrary.ru/author_items.asp?authorid=734538