

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ИНТЕГРИРОВАННОЙ ЗАДАЧИ НЕРЕГУЛЯРНОГО 2D РАСКРОЯ И МАРШРУТИЗАЦИИ

А. А. ПЕТУНИН

Аннотация. В статье рассматривается интегрированная задача 2D раскроя и маршрутизации с единым оптимизационным критерием (Integrated Nesting and Routing Problem, INRP). Эта задача возникает при проектировании технологических процессов раскроя материала на станках листовой резки с ЧПУ. Впервые дается её математическая постановка в общем виде для случая многолистового раскроя и двух типов интегрированного аддитивного оптимизационного критерия, различающихся определением стоимости маршрута режущего инструмента станка с ЧПУ. Задача иллюстрируется точным решением модельного примера. Показывается, что большая часть формальных ограничений связано с технологическими особенностями процесса резки материала при получении из него листовых деталей. Отдельно выделяется класс сложных (с точки зрения математической формализации) ограничений, получивших название «динамических». Отмечается, что соблюдение динамических ограничений задачи маршрутизации инструмента может определяться решениями некоторых геометрических задач на плоскости, а существующие подходы к решению интегрированной задачи INRP, основанные на применении математических моделей дискретной оптимизации, практически не учитывают этот тип ограничений, что приводит к недопустимым технологическим решениям. Описывается подход, основанный на понятии сегмента резки, который обеспечивает учет геометрических ограничений задачи маршрутизации инструмента. В заключение делается вывод о необходимости корректировки форматов данных, используемых для решения второй задачи INRP (Cutting Path Problem), и их дополнении геометрической информацией о раскройной карте и технологической информацией о процессе резки.

Ключевые слова: нерегулярный 2D раскрой; cutting path problem; INRP; динамические геометрические ограничения; сегмент резки; endpoint cutting problem; дискретная оптимизация.

ВВЕДЕНИЕ

Широкое применение в различных отраслях промышленного производства станков листовой резки с ЧПУ обуславливает возросший интерес исследователей к оптимизации технологических процессов раскроя материала и проектирования управляющих программ для данного типа технологического оборудования. Как известно, разработка управляющих программ для станков с ЧПУ осуществляется преимущественно с помощью специализированного программного обеспечения, т. н. САМ-систем (Computer-Aided-Manufacturing). Современные САМ-системы для автоматизации разработки программ для станков листовой резки (лазерной, плазменной, газовой, гидроабразивной, электроэрозионной и др.) независимо от вида применяемой технологии резки, как правило, содержат некоторый пользовательский инструментарий для оптимизации проектирования раскройных карт и оптимизации некоторых параметров процесса листовой резки на этапе генерации управляющей программы. Вместе с тем этот инструментарий не позволяет для большинства практических задач обеспечить в автоматическом режиме научно-обоснованное и технологически приемлемое решение ни одной из двух возникающих NP-трудных оптимизационных проблем: задачей нерегулярного 2D раскроя (Nesting Problem) [1–3] и задачей маршрутизации инструмента станков листовой резки с ЧПУ (Cutting Path Problem) [4–6]. Поэтому качество проектных решений, в том числе и их техноло-

гическая допустимость, во многом определяется квалификацией пользователя, использующего интерактивные приемы проектирования. Традиционно задача раскроя и задача маршрутизации инструмента станка листовой резки решались независимо и последовательно, хотя актуальность разработки алгоритмов и программного обеспечения для решения интегрированной оптимизационной задачи двумерного раскроя и проектирования процесса резки с единым стоимостным критерием совершенно очевидна.

Впервые математическая формулировка интегрированной задачи была приведена в [7]. В дальнейшем для ее названия использовался термин (Integrated Nesting and Routing Problem, INRP) [8].

Незначительное число опубликованных работ в научной литературе, посвященных разработке алгоритмов для решения интегрированной задачи 2D раскроя и маршрутизации с единым оптимизационным критерием, вызвано сложностью с формализацией и вычислением единой целевой функции интегрированной задачи, а также с математической формализацией некоторых видов ограничений для задачи маршрутизации инструмента (Cutting Path Problem). Кроме того, для задачи INRP существует еще одна сложность, связанная с оценками эффективности алгоритмов, разрабатываемых для ее решения. Эта сложность вызвана главным образом тем, что единый стоимостной критерий содержит два слагаемых, второй из которых [9] (определяющий научно-обоснованную стоимость процесса резки) зависит от нескольких параметров конкретного технологического оборудования, данные о величинах которых отсутствуют в Интернете. Это диктует необходимость формирования такого рода данных и знакомство с ними научного сообщества. Данные должны содержать информацию о как можно большем числе наиболее распространенных станков листовой резки. Такие работы в настоящее время ведутся (см., например, [10]). Они позволяют обеспечить сравнительный анализ различных алгоритмов решения как задачи маршрутизации инструмента станков листовой резки с ЧПУ, так и интегрированной задачи. Замена адекватного стоимостного критерия процесса резки или критерия качества раскроя искусственными числовыми критериями (см., например, [11–13]), не может служить основанием для оценки эффективности разрабатываемых алгоритмов.

В работе в следующих разделах дана математическая постановка интегрированной задачи INRP в общем виде для случая многолиствого раскроя и двух типов интегрированного аддитивного оптимизационного критерия, различающихся определением стоимости маршрута режущего инструмента станка с ЧПУ. Далее приведена классификация ограничений задачи, определяющих допустимость получаемых решений на этапе решения задачи маршрутизации инструмента. На основе понятия «сегмент резки» описан подход, позволяющий учитывать при использовании дискретных оптимизационных моделей для решения второй задачи INRP, оптимальной маршрутизации инструмента станка листовой резки с ЧПУ (Cutting Path Problem), наиболее сложный вид геометрических ограничений, «динамические ограничения». Предложенный подход иллюстрирован результатом решения модельного примера интегрированной задачи INRP. В заключение сформулированы основные результаты работы.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА INRP ДЛЯ СЛУЧАЯ МНОГОЛИСТОВОГО РАСКРОЯ

Для формального определения интегрированной задачи 2D раскроя и маршрутизации с единым оптимизационным критерием введем следующие обозначения.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – двумерные геометрические объекты, представляющие собой односвязные или многосвязные области евклидовой плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ограниченные одной или несколькими замкнутыми кривыми (граничными контурами) $C_1, C_2, \dots, C_N$. ($A_i, C_j \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; $i \in \overline{1, n}; j \in \overline{1, N}; N \geq n$). Объекты $A_1, A_2, \dots, A_n$ являются геометрическими моделями плоских деталей. Пусть также определена область размещения объектов $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, которая является геометрической моделью листового материала, из которого вырезаются детали. В общем случае область размещения может состоять из несколько подобластей (листов материала, не обя-

зательно прямоугольной формы). При этом допустимо наличие отверстий в материале (взаимно непересекающихся между собой и с внешним контуром внутренних контуров). Будем полагать, что зафиксирован некоторый вариант размещения n объектов в области размещения, при этом выполнены условия взаимного не пересечения объектов и другие дополнительные условия, обусловленные технологическими требованиями резки деталей на конкретном технологическом оборудовании, в частности, условие соблюдения необходимой ширины реза. Иными словами, фиксированный вариант размещения объектов является допустимым вариантом раскроя (раскройной картой) листового материала для заданного набора n деталей.

Простой пример размещения в двух прямоугольных областях размером 1250×500 мм и 750×750 мм 17 объектов (деталей) ($n = 17$) 4 типоразмеров, описываемых 22 контурами ($N = 22$) с заданным минимальным расстоянием 5 мм между объектами, приведён на рис. 1.



Рис. 1 Пример нерегулярного раскроя двух листов.

Минимальные расстояния между деталями, так же, как и минимальное расстояние от деталей до края листа, – 5 мм. Занятая для раскроя часть материала выделена на рисунке светло-серым цветом. Из практических соображений при планировании раскроя для резки нескольких листов материала в единичном и мелкосерийном производстве деловой подход обычно учитывается только на последнем листе. Длина занятой части второго листа составила около 620 мм.

Суммарная площадь P использованного материала таким образом составила

$$P = 1250 \times 500 + 750 \times 620 = 1090000 \text{ (мм)}.$$

Оптимизационную задачу поиска раскройной карты с минимальным расходом материала при получении из него деталей произвольной формы называют задачей нерегулярного 2D-раскроя (Nesting Problem). В качестве целевой функции задачи здесь, как правило, естественным образом используется величина площади занятой части использованного материала. Для задачи INRP используется стоимостной эквивалент площади, равный себестоимости использованного для раскроя материала

$$Cost_{nest} = P \times price_{mat}, \quad (1)$$

где $price_{mat}$ – цена за единицу площади материала.

Определим теперь критерий, оценивающий стоимость процесса резки для второй оптимизационной задачи (Cutting Path Problem). Рассмотрим понятие маршрута инструмента (маршрута резки) применительно к технологии листовой резки на станке с ЧПУ. Для сохранения требуемой геометрии детали траектория движения режущего инструмента не должна совпадать с граничным контуром детали, а должна задаваться некоторой эквидистантой этого контура, поскольку часть материала вырезается в процессе резки. Как правило, дистанция между эквидистантным контуром, по которому осуществляется резка, и граничным контуром детали определяется величиной, равной половине ширины реза. При листовой резке необходима также предварительная врезка (пробивка) материала перед процессом резки непосредственно по эквидистантному контуру детали. Пробивка материала сопровождается дополнительными

деформациями материала в точке врезки, поэтому производится на расстоянии (дистанции) от контура детали больше, чем дистанция до эквидистантного контура, за исключением особых случаев. Врезка может также осуществляться непосредственно на границе материала («врезка с края листа»). В этом случае достигается уменьшение деформаций материала и геометрических искажений размера и формы вырезаемых деталей, а также сокращается время врезки.

Схема одного из способов резки детали (стандартная техника) показана на рис. 2. Если используется стандартная техника резки, то в этом случае каждый контур вырезается целиком. После резки одного контура переход к следующей точке врезки происходит после выключения инструмента на холостом ходе по прямой линии. При этом точка выключения инструмента в общем случае может не всегда совпадать с точкой входа в эквидистантный контур детали, по которому осуществляется резка, и может лежать вне заданного эквидистантного контура. Во многих случаях допускается программирование точки выключения инструмента непосредственно на эквидистантном контуре.

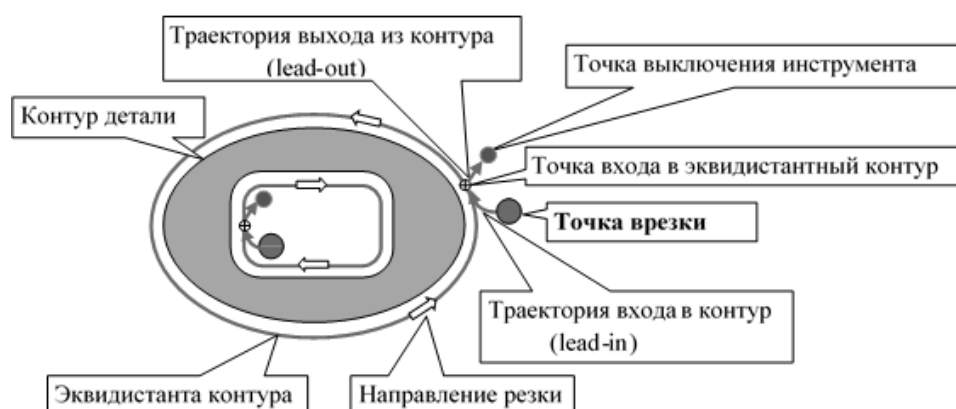


Рис. 2 Схема стандартной техники резки.

Стратегия минимизации тепловых деформаций при термической резке и требования к качеству реза порождают необходимость управления не только выбором точек врезки, но и управлением траекторией входа в контур (lead-in) и способом выхода из контура (lead-out). В зависимости от конкретных условий (вида термической или гидроабразивной резки, марки и толщины материала, выбранной скорости резки, геометрической формы контура и пр.) подход к контуру может осуществляться по дуге окружности, касательная к которой совпадает с касательной к контуру в точке входа, либо производиться по прямой линии (например, по наикратчайшему расстоянию до контура). После завершения процесса резки контура выход из контура также может осуществляться с включенным инструментом с небольшим «перерезом» (либо по дуге, либо по прямой линии). Необходимость выхода из контура с включенным инструментом может быть вызвана тем, что в точке выключения инструмента может возникнуть «взрыв» или оплавление части материала, что приводит к искажению геометрии детали.

Примером нестандартной техники может служить т. н. «цепная» резка, которая заключается в резке нескольких контуров с использованием одной точки врезки. При этом каждый контур, как и в случае применения стандартной техники резки, вырезается целиком. На рис. 3 показан пример схемы резки двух деталей, в которой резка внешних контуров обеих деталей производится без выключения режущего инструмента с использованием только одной точки врезки и соответственно одной точки выключения инструмента.

Перемещение инструмента в точку врезки в этом примере начинается из начальной точки на холостом ходе, а после завершения резки последнего контура предусмотрен возврат инструмента в начальную точку.

Существует и множество других техник резки (см. их описание, например, в [10]), однако в любом случае маршрут резки однозначно определяется следующими компонентами:

- начальной точкой позиционирования инструмента;
- конечным набором точек врезки;
- соответствующим набором точек выключения инструмента;
- траекториями движения инструмента на рабочем ходе (с включенным инструментом) между точкой врезки и точкой выключения инструмента;
- порядком обхода точек врезки (сегментов резки).



Рис. 3 Пример схемы резки деталей с применением разных техник резки.

На основании данных о маршруте резки можно вычислить суммарную длину рабочего и холостого хода инструмента и вычислить, например, время процесса резки, которое определяется по формуле:

$$T_{cut} = \frac{L_{on}}{V_{on}} + \frac{L_{off}}{L_{off}} + N_{pt} t_{pt}, \quad (2)$$

где L_{off} – суммарная длина холостого хода (перемещения режущего инструмента в выключенном режиме); L_{on} – суммарная длина рабочего хода (перемещения инструмента во включенном режиме); V_{off} – скорость холостого хода режущего инструмента; V_{on} – скорость рабочего хода инструмента; N_{pt} – количество точек врезки; t_{pt} – время, затрачиваемое на врезку в материал в одной точке. При этом подразумевается, что получаемое в результате врезки отверстие расположено внутри материала листа. Однако при резке деталей, как отмечалось, могут быть использованы и другие типы врезки, что приводит к изменению времени врезки t_{pt} в этих случаях. Если при резке деталей было использовано несколько типов врезки, то формула (2) запишется в более общем виде:

$$T_{cut} = \frac{L_{on}}{V_{on}} + \frac{L_{off}}{L_{off}} + \sum_{j=1}^r N_{pt}^j t_{pt}^j, \quad (3)$$

где r – число использованных типов врезки; N_{pt}^j – количество точек врезки типа j ; t_{pt}^j – время, затрачиваемое на одну точку врезки типа j . И в (2) и в (3) значение скорости холостого хода инструмента V_{off} – константа, определяемая техническими характеристиками используемого станка с ЧПУ. Значение рабочего хода инструмента V_{on} программируется при разработке управляющей программы в соответствии с используемой технологией резки, техническими характеристиками станка и параметрами листового материала (имеется в виду марка материала и толщина). Особенности листовой резки на станках с ЧПУ предполагают, что при многолистовом раскрое управляющая программа для резки разрабатывается для каждого листа отдельно.

Если при решении конкретной задачи INRP было использовано m листов материала, тогда формула (3) запишется в виде

$$T_{cut} = \sum_{i=1}^m T_{cut}^i, \quad (4)$$

где T_{cut}^i — время резки i -го листа.

На многих предприятиях стоимость (себестоимость) процесса резки на станках листовой резки определяется стоимостью т. н. нормо-часа, который рассчитывается экономистами организации с учетом различных экономических параметров. Таким образом, себестоимость процесса резки на конкретном технологическом оборудовании с ЧПУ можно определить по формуле:

$$Cost_{cut} = T_{cut} price_{нч}, \quad (5)$$

где $price_{нч}$ — стоимость нормо-часа работы оборудования. Тогда для интегрированной задачи 2D раскроя и маршрутизации с единым оптимизационным критерием можно определить аддитивный стоимостной критерий

$$Cost_{INRP} = Cost_{nest} + Cost_{cut}. \quad (6)$$

Более точной (нежели стоимость нормо-часа) экономической характеристикой качества разработанной управляющей программы является стоимость (себестоимость) процесса резки деталей на станках с ЧПУ, рассчитываемая с помощью других показателей, которые включают в себя произведенные во время резки затраты на электроэнергию и расходные материалы, на обслуживание станка с ЧПУ, а также другие эксплуатационные затраты. Стоимость резки не всегда пропорциональна времени резки, поскольку зависит еще и от различных режимов резки. По аналогии с формулой времени резки (2) показатель стоимости резки можно определить по следующей формуле:

$$F_{cost} = L_{off}C_{off} + L_{on}C_{on} + N_{pt}C_{pt}, \quad (7)$$

где C_{on} — стоимость единицы пути рабочего хода; C_{off} — стоимость единицы пути холостого хода; C_{pt} — стоимость одной точки врезки, а C_{on} , C_{off} и C_{pt} имеют тот же смысл, что и в формуле (2). При этом эти величины зависят от типа станков с ЧПУ, технологии резки, используемой скорости рабочего хода инструмента, толщины и марки материала. Функциональная зависимость этих величин от перечисленных параметров может задаваться либо табличными функциями, либо аналитически. При этом абсолютные значения этих величин на российских предприятиях, использующих станки с ЧПУ для листовой резки, определяются экономическими службами с учетом многих факторов и могут существенно различаться на разных предприятиях. Зачастую стоимость резки вообще не учитывается в раскройно-заготовительном производстве либо рассчитывается на основании специальных нормативов, не зависящих от величин L_{on} , L_{off} и N_{pt} . Очевидно, что необходимость быстрого предварительного расчета стоимости резки для каждой управляющей программы резки возникает на предприятиях, оказывающих услуги сторонним организациям по резке материала. Однако и на многих таких предприятиях для определения стоимости резки учитывается только длина рабочего хода инструмента L_{on} , которая принимается равной суммарному периметру граничных контуров вырезаемых деталей $C_1, C_2, \dots, C_N$, что, естественно, приводит к неадекватной оценке времени и стоимости процесса резки. Особо следует подчеркнуть, что при оптимизации стоимостных параметров следует применять теоретически обоснованный способ определения показателя стоимости резки, задаваемый формулой (7). В случае использования нескольких типов врезки формула (7) примет вид

$$F_{cost} = L_{off}C_{off} + L_{on}C_{on} + \sum_{j=1}^r N_{pt}^j C_{pt}^j, \quad (8)$$

где C_{pt}^j – стоимость одной точки врезки типа j , а единый аддитивный стоимостной критерий INRP для случая многолиствого раскроя $Cost_{INRP}$

$$Cost_{INRP} = Cost_{nest} + \sum_{i=1}^m F_{cost}^i. \quad (9)$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ CUTTING PATH PROBLEM

При проектировании маршрута резки для станков листовой резки с ЧПУ основные проблемы связаны не столько с эффективным применением оптимизационных алгоритмов, сколько с построением технологически допустимых решений. Использование различных технологий термической резки порождает термические деформации материала, что приводит к геометрическим искажениям форм и размеров вырезаемых деталей. Это диктует необходимость формирования маршрутов резки с учетом особенностей резки и спроектированных раскройных карт. Часть возникающих ограничений (например, ограничения на выбор геометрической области возможных точек врезки) носят статический характер и могут быть учтены на этапе формирования исходных данных для оптимизационных алгоритмов. Подробная классификация ограничений приведена в [14, §1.3]. Особую сложность представляют т. н. «динамические» ограничения, которые возникают уже в процессе формирования допустимых маршрутов резки в зависимости от уже частично сформированного маршрута. В основном этот тип ограничений связан с необходимостью выбирать только такие варианты маршрута резки, которые обеспечивают минимальные значения тепловых деформаций в материале. Другими словами, без учета этих ограничений построение множества допустимых с точки зрения технологии листовой резки вариантов маршрута в общем случае невозможно. Как показано в [14, §2.3], большая часть этих ограничений может быть сведена к решению некоторых геометрических задач.

На рис. 4 представлены схемы маршрутов резки, спроектированные для раскройных планов, показанных на рис. 1.

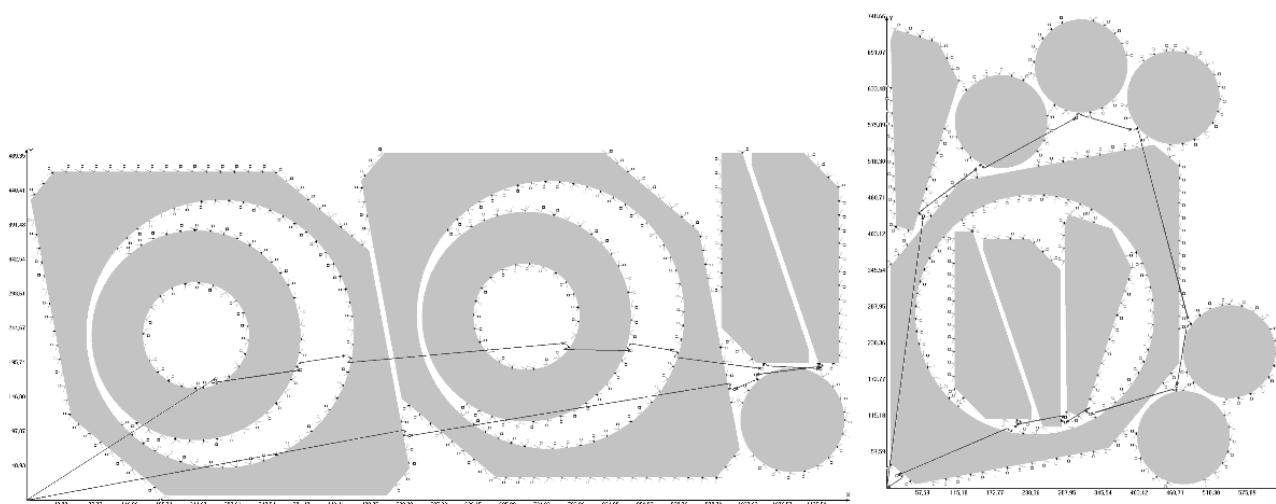


Рис. 4 Маршруты резки для двух листов раскройной карты (см. рис. 1).

Для минимизации времени резки T_{cut}^i на обоих листах использовался метод динамического программирования [15], который обеспечивает точное решение задачи Cutting Path Problem (то есть минимум значения T_{cut}^2) для следующих заданных условий:

- при построении маршрута резки использовался заранее определенный набор допустимых точек врезки (выделены квадратики малого размера в точках около контуров деталей);

- при выборе техники резки применялась только стандартная техника (резка по контуру).

Отметим, что в результате расчета используемый метод на втором листе для обеспечения глобального экстремума целевой функции выбрал последнюю точку врезки P-1 (рис. 5) в левом углу листа, но эта точка врезки не удовлетворяет динамическому ограничению «жесткость детали» [14, §1.3], так как приводит к недопустимым тепловым деформациям материала и искажению геометрии детали при завершении процесса резки.

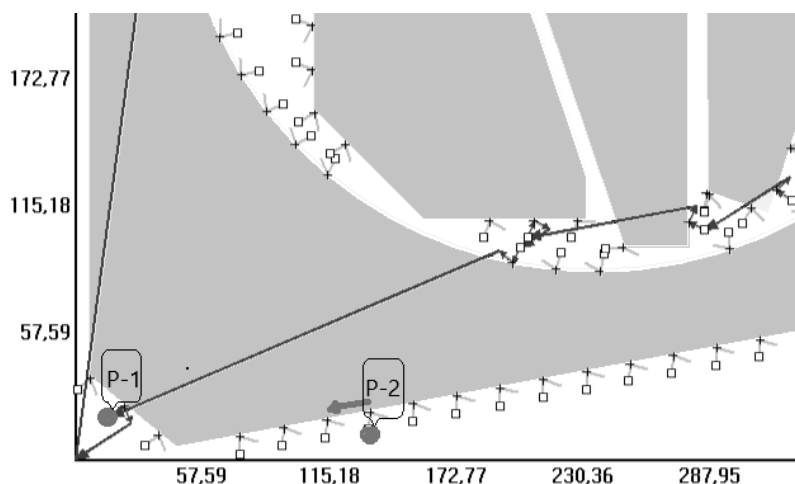


Рис. 5 Пример несоблюдения правила «жесткости детали» при выборе точки врезки.

Допустимым вариантом, удовлетворяющим технологическим требованиям термической резки для этого примера и обеспечивающим минимум T_{cut}^2 , является вариант с точкой врезки P-2 (см. рис. 5), и то только при условии резки внешнего контура угловой детали против часовой стрелки, поскольку в этом случае уменьшается тепловая деформация материала, возникающая при завершении резки контура.

Допустимость точки врезки алгоритмически можно установить только при наличии геометрической информации о раскройной карте. Это означает, что доминирующий в настоящее время подход к решению задачи оптимизации маршрута инструмента машин листовой резки с ЧПУ, основанный на применении чисто дискретных моделей типа модели обобщенной задачи коммивояжера (Generalized Traveling Salesman Problem, GTSP) и PCGTSP, где стандартная модель GTSP дополнена условиями предшествования, или некоторых моделей целочисленного линейного и динамического программирования (MILP и DP), или чисто графовых моделей, где геометрия раскройной карты заменяется данными о параметрах эйлера графа, нуждается в серьезной доработке. В частности, форматы данных, используемые в тестовых примерах для исследования эффективности оптимизационных алгоритмов, должны быть, как минимум, дополнены данными о необходимой геометрической информации, либо наряду с дискретными моделями раскройной карты и маршрута инструмента при формировании допустимых вариантов маршрутизации инструмента должна использоваться полная геометрическая информация о раскройной карте. Прежде всего, это касается работ, в которых используются чисто графовые модели, поскольку форматы описания графов не могут содержать всю геометрическую информацию, необходимую для корректного, технологически допустимого построения маршрута резки. Впрочем, и все другие алгоритмы оптимальной маршрутизации маршрута инструмента, которые не учитывают динамические ограничения задачи Cutting Path Problem, не могут пока в общем случае гарантировать допустимость получаемых решений. Отметим некоторые работы, в которых оптимизационные алгоритмы за приемлемое время позволяют формировать решения, близкие к оптимальным и учитывать статические геометрические ограничения (без учета динамических) для некоторых классов задач Cutting Path Problem. Речь идет о классе ECP (Endpoint Cutting Problem) и GTSP.

Подробная классификация задач оптимальной маршрутизации инструмента станков листовой резки с ЧПУ описана в [4]. ЕСП, так же, как и класс GTSP, предусматривает только конечный набор возможных точек врезки для раскройной карты, поэтому дискретные модели здесь применять целесообразно [4, 16–19]. Вместе с тем учет динамических ограничений процесса резки остается сложно реализуемым и для этого класса задач. Для задач, использующих формат данных PCGTSP, выделим быстродействующие алгоритмы, анонсированные в [20–22]. Общим недостатком этих алгоритмов является замена адекватных критериев оптимизации (7) и (8) упрощенными целевыми функциями.

Частично геометрические проблемы, связанные с формированием технологически допустимых маршрутов резки, позволяет решить подход, основанный на предварительном формировании множества возможных сегментов резки с последующим поиском оптимального маршрута среди маршрутов, содержащих только сформированные сегменты резки.

Сегментом резки $S = MM^*$ мы называем траекторию рабочего хода инструмента между точкой врезки M и соответствующей ей точкой выключения инструмента M^* , включающую траектории входа в контур (lead-in) и выхода из контура (lead-out). Геометрически сегмент резки представляет собой кривую, заданную на евклидовой плоскости.

$$(S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}; M = (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, M^* = (x^*, y^*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

Для исключения неоднозначности движения инструмента мы считаем, что в каждой точке траектории задано направление движения инструмента. Если сегмент резки не содержит замкнутых кривых (контуров), то направление движения резки в каждой точке траектории однозначно определяется начальной точкой сегмента (точкой врезки) и точкой выключения инструмента. Замкнутые кривые в траектории рабочего хода инструмента могут появляться и при программировании «петель», которые применяют технологи ЧПУ для повышения качества реза в острых углах траектории.

На основе понятия сегмента резки все техники фигурной резки на станках с ЧПУ естественным образом делятся на 3 группы:

- «резка по замкнутому контуру» (стандартная техника): в этом случае сегмент резки содержит ровно один эквидистантный внешний или внутренний граничный контур детали, который вырезается целиком;
- мульти-сегментная резка контура: в этом случае для вырезки одного контура используются не менее двух сегментов резки;
- мультиконтурная резка: один сегмент резки содержит несколько граничных контуров деталей.

Отметим в связи с введенным понятием еще пару работ [23, 24], направленных на решение одной частной задачи, не связанной напрямую с задачей оптимизации маршрута резки для заданной раскройной карты. Речь идет о задаче поиска сегментов резки максимальной длины, содержащих части контуров деталей, которые вырезаются с применением техники т. н. «составленного реза». Для решения этой задачи использовалось описание геометрии раскройной карты посредством эйлерова графа. Работа, судя по всему, не имеет хороших перспектив для реального продолжения по описанной выше причине, обусловленной бедностью геометрического инструментария в разрабатываемых алгоритмах.

Сформулированный подход формирования множества возможных сегментов резки выделяет отдельный класс задач проблемы оптимальной маршрутизации инструмента Cutting Path Problem. Этот класс получил название Generalized Segmental Continuous Cutting Problem (GSCCP), для которого разработаны эффективные оптимизационные алгоритмы [25], сочетающие специализированные эвристические методы, метод динамического программирования, метод ветвей и границ, и учитывающие некоторые типы формализованных динамических ограничений. Алгоритмы могут применяться как для решения задачи оптимальной маршрутизации инструмента технологического оборудования листовой резки с ЧПУ, так и для решения интегрированной задачи INRP.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые дана математическая постановка интегрированной задачи 2D раскроя и маршрутизации с единым оптимизационным критерием в общем виде для случая многолиствого раскроя и двух типов интегрированного аддитивного оптимизационного критерия, различающихся определением стоимости маршрута режущего инструмента станка с ЧПУ.

Среди ограничений задачи INRP, определяющих допустимость получаемых решений на этапе решения задачи маршрутизации инструмента, отдельно выделен класс наиболее сложных ограничений, получивших название «динамических».

Отмечено, что соблюдение динамических ограничений задачи маршрутизации инструмента может определяться решениями некоторых геометрических задач на евклидовой плоскости.

Обоснован вывод о том, что существующие подходы к решению интегрированной задачи INRP, основанные на применении математических моделей дискретной оптимизации, практически не учитывают этот тип ограничений, что приводит к недопустимым технологическим решениям.

Описан подход, основанный на понятии сегмента резки, который позволяет учитывать некоторые виды геометрических ограничений на этапе построения решения задачи Cutting Path Problem.

В контексте данного исследования автор считает целесообразным отметить работы по сходной тематике [26–29].

БЛАГОДАРНОСТИ И ПОДДЕРЖКА

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда
(грант № 23-21-00343).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- [1] Wascher G., Hausner H., and Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems // *European Journal of Operational Research*. Vol. 183. No. 3. 2007. Pp. 1109–1130. doi:10.1016/j.ejor.2005.12.047.
- [2] Guo B., Zhang Y., Hu J., Li J., Wu F., Peng Q., and Zhang Q. Two-dimensional irregular packing problems: A review // *Front. Mech.* 2022. Eng 8:966691. doi: 10.3389/fmech.2022.966691.
- [3] Romanova T., Stoyan Y., Pankratov A., et al. Optimal layout of ellipses and its application for additive manufacturing // *Int. J. Prod. Res.* 2021. 59(2). 560–575.
- [4] Dewil R., Vansteenwegen P., and Cattrysse D. A review of cutting path algorithms for laser cutters // *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2016. 87(5). 1865–1884. doi:10.1007/s00170-016-8609-1.
- [5] Fernandes Silva, Everton. The cutting path determination problem: input files and solutions' layouts // *Mendeley Data*. 2020. V5. doi: 10.17632/vffwyvbdzy.5.
- [6] Junior B. A., de Carvalho G. N., Santos M. C., Pinheiro P. R., Celedonio J. W. L. Evolutionary algorithms for optimization sequence of cut in the laser cutting path problem // *Appl. Sci.* 2023. 13. 10133. <https://doi.org/10.3390/app131810133>.
- [7] Petunin A. A. Development of CAM-system for sheet cutting machines as an innovation example // *Innovative information technology: Theory and practice. International scientific edition: materials of the international workshop (Karlsruhe–Ufa–Dresden, April 8–13, 2011)*. Ufa: UGATU, 2011. Pp. 47–50.
- [8] Петунин А. А., Котел Н. С., Таваева А. Ф. Об одном примере оптимального решения интегрированной задачи 2D раскроя и маршрутизации инструмента станков листовой резки с ЧПУ // *Вестник Югорского государственного университета*. 2023. № 4. С. 88–101. <https://doi.org/10.18822/byusu20230488-101>. [[Petunin A. A., Kotel N. S., Tavaeva A. F. “About one optimal solution example to the integrated 2d nesting and routing problem for CNC sheet cutting machines” // *Yugra State University Bulletin*. 2023. Vol. 19, No. 4, pp. 88–101. doi: 10.18822/byusu20230488-101. (In Russian).]].
- [9] Верхотуров М. А., Тарасенко П. Ю. Математическое обеспечение задачи оптимизации пути режущего инструмента при плоском фигурном раскрое на основе цепной резки // *Вестник УГАТУ*. 2008. Т. 10. № 2(27). С. 123–130. [[Verkhoturov M. A., Tarasenko P. Yu. “Mathematical support for the problem of optimizing the path of a cutting tool in flat figured cutting based on chain cutting” // *Bulletin of Ufa State Aviation Technical University*. 2008. Vol. 10, No. 2(27), pp. 123–130. (In Russian).]].
- [10] Tavaeva A., Petunin A., Ukolov S., Krotov V. A cost minimizing at Laser Cutting of Sheet Parts on CNC Machines // *Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR'19. Communications in Computer and Information Science*. 2019. Springer. doi: 10.1007/978-3-030-33394-2_33.
- [11] Oliveira L., Silva E., Oliveira J., et al. Integrating irregular strip packing and cutting path determination problems: A discrete exact approach // *Comput. Ind. Eng.* 2020. Vol.14. Pp. 1–9. doi: 10.1016/j.cie.2020.106757.

- [12] Oliveira L. T., Carravilla M. A., Oliveira J. F., & Toledo F. M. B. A biobjective matheuristic for the integrated solution of the irregular strip packing and the cutting path determination problems // *Pesquisa Operacional*. 2023. 43. <https://doi.org/10.1590/0101-7438.2023.043.00275212>.
- [13] Sherif S.U., Jawahar N., Balamurali M. Sequential optimization approach for nesting and cutting sequence in laser cutting // *J. Manuf. Syst.* 2014. 33(4). 624–638. <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2014.05.011>.
- [14] Оптимальная маршрутизация инструмента станков фигурной листовой резки с числовым программным управлением. Математические модели и алгоритмы: монография / А. А. Петунин, А. Г. Ченцов, П. А. Ченцов. Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2020. 247 с. [[Optimal Routing of the Tool of Figured Sheet Cutting Machines with Numerical Control. Mathematical Models and Algorithms: Monograph / A. A. Petunin, A. G. Chentsov, P. A. Chentsov. Ekaterinburg: Publishing House of Ural University, 2020. (In Russian).]]
- [15] Chentsov A. G., Chentsov P. A. Two-stage dynamic programming in the routing problem with decomposition // *Autom Remote Control*. 2023. 84. 543–563. <https://doi.org/10.1134/S0005117923050053>.
- [16] Hajad M., Tangwarodomnukun V., Dumkum C., Jaturanonda C. Solving the laser cutting path problem using population-based simulated annealing with adaptive large neighborhood search // *KEM*. 2020. 833:29–34. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/kem.833.29>.
- [17] Amaro Junior B. A., Santos M. C., Carvalho G. N., Araújo L. J., & Pinheiro P. R. Metaheuristics for the minimum time cut path problem with different cutting and sliding speeds // *Algorithms*. 2021. 14. 305.
- [18] Dewil R., Vansteenwegen P., Cattrysse D. Construction heuristics for generating tool paths for laser cutters // *International Journal of Production Research*. Mar. 2014. 1–20. 13. 2015. 1690. Pp. 060002-1–060002-7.
- [19] Hatem N., Yusof Y., Kadir A. Zuhra A., Mohammed M. A. Review of tool path optimization in CNC machines: methods and its applications based on artificial intelligence // *International Journal of Advanced Science and Technology*. 2020. 29 (04). 3368 - . <http://serisc.org/journals/index.php/IJAST/article/view/24422>.
- [20] Salman R., Ekstedt F., Damaschke P. Branch-and-bound for the precedence constrained generalized traveling salesman problem // *Operations Research Letters*. 2020. Vol. 48. No. 2. Pp. 163–166. DOI: 10.1016/j.orl.2020.01.009.
- [21] Khachay, M., Kudriavtsev, A., Petunin, A. (2020). PCGLNS: A Heuristic Solver for the Precedence Constrained Generalized Traveling Salesman Problem // In: Olenov, N., Evtushenko, Y., Khachay, M., Malkova, V. (eds) *Optimization and Applications. OPTIMA 2020. Lecture Notes in Computer Science* (), vol 12422. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62867-3_15.
- [22] Khachai D., Sadykov R., Battaia O., Khachay M. Precedence constrained generalized traveling salesman problem: Polyhedral study, formulations, and branch-and-cut algorithm // *European Journal of Operational Research*. 2023. Vol. 309. Issue 2. P. 488–505, <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2023.01.039>.
- [23] Makarovskikh T., Panyukov A., Savitskiy E. Mathematical models and routing algorithms for economical cutting tool paths // *Int. J. Prod. Res.* 2018. 56(3). 1171–1188 <https://doi.org/10.1080/00207543.2017.1401746>.
- [24] Makarovskikh T., Panyukov A., Savitskiy E. Software development for cutting tool routing problems // *Procedia Manufacturing*. 2019. Vol. 29. No. SHEMET 2019. Pp. 567–574. DOI: 10.1016/j.promfg.2019.02.123.
- [25] Petunin A., Ukolov S. Iterative algorithm for the generalized segmental continuous cutting problem with optimization time constraint // *Intelligent and Fuzzy Systems. INFUS 2024. Lecture Notes in Networks and Systems*. 2024. Vol. 1089. Springer. Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-67195-1_59.
- [26] Верхотуров М. А., Верхотурова Г. Н. Об одном способе построения No-Fit Polyhedron при решении задачи плотного размещения трёхмерных объектов // *СИИТ*. 2023. Т. 5. № 6(15). С. 50–56. EDN WVTNES. [[Verkhoturov M. A., Verkhoturova G. N. "On one method of constructing No-Fit Polyhedron when solving the problem of dense placement of three-dimensional objects" // *SIIT*. 2023. Vol. 5, No. 6(15), pp. 50–56. EDN WVTNES. (In Russian).]]
- [27] Верхотуров М. А., Верхотурова Г. Н. О предварительной обработке информации о заготовках в задачах плоского фигурного раскроя // *СИИТ*. 2023. Т. 5. № 1(10). С. 25–33. EDN BOPKWP. [[Verkhoturov M. A., Verkhoturova G. N. "Preliminary processing of information about blanks in problems of flat figure cutting" // *SIIT*. 2023. Vol. 5, No. 1(10), pp. 25–33. EDN BOPKWP. (In Russian).]]
- [28] Усманова А. Р., Валиахметова Ю. И. Особенности задач-триплетов в задаче упаковки // *СИИТ*. 2023. Т. 5. № 1(10). С. 34–40. EDN VSYIOY. [[Usmanova A. R., Valiakhmetova Yu. I. "Features of triplet problems in the packing problem" // *SIIT*. 2023. Vol. 5, No. 1(10), pp. 34–40. EDN VSYIOY. (In Russian).]]
- [29] Усманова А. Р., Валиахметова Ю. И. Особенности метода поиска с запретами для задачи упаковки // *СИИТ*. 2022. Т. 4. № 2(9). С. 37–42. EDN NASXQA. [[Usmanova A. R., Valiakhmetova Yu. I. "Features of the tabu search method for the packing problem" // *SIIT*. 2022. Vol. 4, No. 2(9), pp. 37–42. EDN NASXQA. (In Russian).]]

Поступила в редакцию 5 декабря 2024 г.

МЕТАДАННЫЕ / METADATA

Title: Optimization and geometrical problems in the integrated problem of irregular 2D nesting and routing.

Abstract: The article considers the integrated problem of 2D nesting and routing with a single optimization criterion (Integrated Nesting and Routing Problem, INRP). This problem arises in the design of technological processes of cutting material on CNC sheet cutting machines. For the first time, its mathematical formulation is given in a general form for the case of multi-sheet cutting and two types of integrated additive optimization criterion that differ in the definition of the cost of the route of the cutting tool of the CNC machine. The problem is illustrated by an exact solution of a model example. It is shown that most of the formal constraints are associated with the technological features of the process of cutting the material when obtaining sheet parts from it. A class of complex (from the point of view of mathematical formalization) constraints, called "dynamic", is separately identified. It is noted that compliance with the dynamic constraints of the tool routing problem can be determined by solutions of some geometric problems

on the plane, and the existing approaches to solving the integrated INRP problem based on the use of mathematical models of discrete optimization practically do not take this type of constraints into account, which leads to unacceptable technological solutions. An approach based on the concept of a cutting segment is described, which ensures that the geometric constraints of the tool routing problem are considered. In conclusion, a conclusion is made about the need to adjust the data formats used to solve the second problem of INRP (Cutting Path Problem) and supplement them with geometric information about the cutting map and technological information about the cutting process.

Key words: irregular 2D nesting; cutting path problem; INRP; dynamic geometric constraints; cutting segment; endpoint cutting problem; discrete optimization.

Язык статьи / Language: Русский / Russian.

Поддержка/Support: Грант Российского научного фонда № 23-21-00343.

Об авторе / About the author:

ПЕТУНИН Александр Александрович

Уральский федеральный университет, Россия.

Проф. каф. информационных технологий и автоматизации проектирования. Математик (Уральск. гос. ун-т, 1977). Канд. техн. наук (Уральск. политехн. ин-т, 1983). Д-р техн. наук (Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, 2010). Иссл. в обл. Cutting & Packing, автоматиз. проектирования и дискр. оптимизации.

E-mail: petunin@urfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2540-1305>

PETUNIN Aleksandr Aleksandrovich

Ural Federal University, Russia.

Prof., Dept. of Information Technology and Design Automation. Mathematician (Ural State Univ., 1977). Cand. Sci. (Eng.) (Ural Polytechnic Institute., 1983). Doctor of Engineering Sciences (Ufa State Aviation Technical Univ., 2010). Research in the field of Cutting & Packing, design automation and discrete optimization.

E-mail: petunin@urfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2540-1305>