



В связи с этим появляется необходимость учитывать термический фактор, что позволяет повысить качество получаемых заготовок по сравнению с обычной минимизацией пути холостого хода.

С другой стороны, если говорить о ЦД, необходима «синхронизация» с рассматриваемым процессом резки и, в первую очередь, с той реальной температурой, которая имеется у тех или иных точек конкретного, раскраиваемого в данный момент материала.

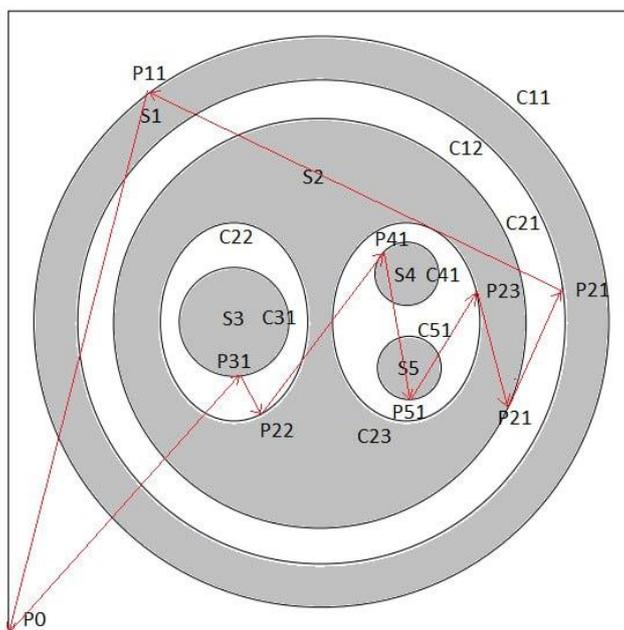
## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

**Дано:**  $L(a \times b)$  – раскраиваемая область (рис. 1);  $\{S_i\}$  – заготовки, где  $i = 1 \div n$  – номер заготовки;  $\{C_{ij}\}$  – контуры заготовок, где  $i$  – номер заготовки,  $j$  – номер контура заготовки  $i$ ,  $j = 1 \div m_i$  ( $m_i \geq 1$  – количество внешних и внутренних контуров заготовки  $S_i$ );  $\{P_{ij}\}$  – точки врезки в контуры, где  $i$  – номер заготовки,  $j$  – номер контура заготовки  $S_i$ ;  $P_{нач}$  – начальное положение режущего инструмента.

**Найти:** такое  $R^*$ , что  $T(\text{Tr}(R^*), L) \leq t_{\max}$ , где  $R = (P_{нач}, \dots, P_{ij}, \dots, P_{нач})$  – последовательность точек врезки контуров, где  $i = 1 \div n$ ,  $j = 1 \div m_i$ ;  $\text{Tr}(R)$  – путь режущего инструмента при движении по последовательности точек  $R$ ;  $T(\text{Tr}(\cdot), L)$  – функция, определяющая максимальную температуру точки  $(x, y)$  ( $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ ) раскраиваемого листа  $L$  во время резки по пути  $\text{Tr}(\cdot)$ .

Следует отметить, что задача может не иметь решения при определенных значениях  $t_{\max}$  меньше некоторой величины  $t_{\max}$ , так как при резке металл нагревается до температуры плавления, и эта температура распространяется по всей области листа.

Соответственно при движении режущего инструмента с заданной скоростью по всем вырезаемым заготовкам может возникнуть ситуация, при которой не появятся области листа, имеющие температуру, меньше  $(t_{\max} - \delta)$ . Как следствие, если начать вырезать заготовку, расположенную в такой зоне, то температура повысится больше величины  $t_{\max}$ .



**Рис. 1** Карта раскроя (заготовки  $S_i$ , контуры  $C_{ij}$ , точки врезки  $P_{ij}$ ) и путь режущего инструмента (стрелки), построенный с учетом ограничений связности

Практически эту проблему можно решить, только приостановив процесс резки на какое-то время до охлаждения тех или иных зон листа до приемлемой температуры. Однако на практике такой прием обычно не применяется.

В этом контексте имеет смысл говорить о минимизации количества перегревов, а не о не превышении величины  $t_{\max}$ . Что в дальнейшем и описывается в данной статье.

При решении рассматриваемой проблемы необходимо учитывать **дополнительные ограничения** «связности» заготовок/контуров, находящихся внутри других контуров/заготовок, с «основной» частью листа (внутри вырезанных заготовок/контуров не должны оставаться невырезанные контуры/заготовки).

Пусть  $Q_{ij}$  – порядковый номер осуществления вырезания контура  $C_{ij}$ , ( $Q_{ij} > 0$ ,  $Q_{ij} \in Z$ ).

При переходе от контура  $C_{ij}$  к контуру  $C_{kl}$ :  $Q_{kl} - Q_{ij} = 1$ .

**Ограничение связности «внутренний–внешний»:** При построении пути режущего инструмента необходимо сначала вырезать все внутренние контуры заготовки, после чего обработать ее внешний контур:

$$\forall C_{kj}, C_{k1} : Q_{k1} - Q_{kj} = 1, j > 1.$$

Должно соблюдаться следующее условие:

$$\forall C_{kb} : b > 1 \exists Q_{kb} : Q_{kb} \leq Q_{kj}, 0 < Q_{k1} - Q_{kb} < m_k.$$

**Ограничение связности «внешний–внутренний»:** Пусть  $IN_{C_{il}} = \{D_k\}$  – множество всех заготовок, находящихся внутри внутреннего контура  $C_{il}$  заготовки  $S_i$  на первом уровне вложенности. Перед тем как начать вырезать контур  $C_{il}$ , необходимо вырезать все заготовки, находящиеся во множестве  $IN_{C_{il}}$

$$\forall C_{k1} : D_k \in IN_{C_{il}}, l \in (1; m_i] \exists Q_{k1} : Q_{k1} < \min \{Q_{il}\}_{l=2}^{m_i}.$$

Такие варианты сформированных карт раскроя могут привести к следующим ситуациям:

1. Заготовки/контур, несвязанные с листом после вырезки, могут сместиться/деформироваться от температурного воздействия и наличия внутренних напряжений, имеющих в листе с момента его изготовления, соответственно заготовки/контур, которые находятся внутри вырезанных контуров/заготовок, в этом случае будут вырезаны также со смещением, то есть некорректно.

2. Возможен перегрев данной заготовки/контура и контуров/деталей, находящихся внутри нее/него в процессе последующей резки контуров/заготовок, находящихся внутри рассматриваемой/ого, опять-таки из-за того, что нет связи с «основным» материалом, который бы являлся местом отвода тепла.

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

В данной постановке задача сводится к одной из самых известных проблем дискретной оптимизации – задаче коммивояжера (TSP – Travelling Salesman Problem) и относится к классу NP-трудных. Основная проблема при ее решении заключается в сложности определения температуры любой точки листа в процессе его резки по тому или иному выбранному пути. Аналитически решить эту задачу точно не представляется возможным, поэтому используются различные приближенные методы инженерного анализа, такие как, например, метод конечных элементов, который является достаточно ресурсоемким, особенно если говорить про решение задачи в реальном времени, то есть с учётом текущего состояния нагрева тех или иных участков раскраиваемого материала в процессе резки.

В связи с этим был разработан подход, основанный на воксельном представлении информации, который был апробирован и показал хорошие результаты при решении задач двумерного и трёхмерного размещения объектов сложных геометрических форм [10–12].

Основная идея этого подхода состоит в «непосредственном» моделировании размещенных на листе заготовок в памяти ЭВМ, осуществляемого на основе дискретно-логической структуры оперативной памяти. В нашем случае – это представление памяти в виде  $n$ -мерной матрицы, каждым элементом которой является такой ее участок, который соответствует понятию

точки области размещения. В простейшем случае матрица точек двумерная ( $n = 2$ ), а для более точного моделирования нагрева листа и распространения по нему температуры может быть использована трехмерная матрица ( $n=3$ ), причем размер третьей координаты  $Z$  зависит от толщины материала.

Рассмотрим двумерный случай.

### Нагрев области раскроя во время резки

При движении режущего инструмента по пути  $Tr(\cdot)$  те точки области раскроя (листа  $L$ ), через которые он проходит во время резки контура  $C_{ij}$ , нагреваются до температуры плавления соответствующего материала.

### Распространение температуры

Предложен следующий принцип распространения температуры в дискретном пространстве:

1) Для каждой области из 9 точек (при 8-связности) выбирается точка  $P$  с самой высокой температурой.

2) Затем рассчитывается новая температура выбранной точки  $P$  в зависимости от  $T$  – температуры точки;  $\Delta T$  – количества тепла, передаваемого каждой соседней точке;  $Count$  – количества соседних точек;  $K_{T/проводности}$  – коэффициента распространения тепла ( $0 \leq K_{T/проводности} \leq 1$ );  $K_{T/потери}$  – коэффициента теплоотдачи в окружающую среду ( $0 \leq K_{T/потери} \leq 1$ ):

$$\Delta T = P.T \times K_{T/проводности};$$

$$P.T = (P.T - \Delta T \times Count) \times K_{T/потери}.$$

3) Для каждой из соседних точек  $S$  рассчитывается температура с учетом приращения  $\Delta T$  в зависимости от коэффициента теплопроводности  $K_{T/проводности}$  и теплопотери во внешнюю среду  $K_{T/потери}$  (рис. 2):

$$S.T = (S.T + \Delta T) \times K_{T/потери}.$$

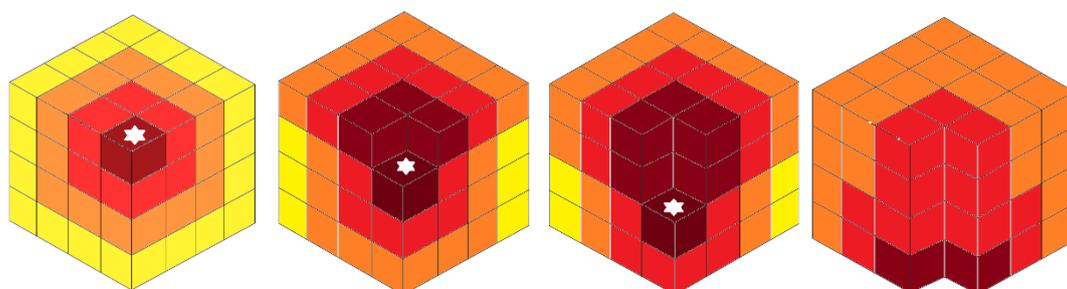


Рис. 2 3D-модель распространения тепла

### Синхронизация с реальным процессом

Для решения этой задачи необходимо наличие информации о реальной температуре, имеющейся в тот или иной момент времени движения режущего инструмента при обработке конкретного листа в том или ином наборе точек, расположенном на его поверхности. В простейшем случае, например, это могут быть вершины листа. В процессе резки температура, полученная при моделировании в ЦД, корректируется на реальную температуру, а затем эти изменения передаются в другие точки листа при помощи вышеописанного механизма.

Также может быть синхронизировано текущее расположение режущего инструмента с учетом реальной скорости и расположения.

Ниже приведен псевдокод алгоритма для реализации «дополнительных ограничений».

**алг. Распределение тепла**

нач.

Выбрать из области из 9 точек точку с наивысшей температурой  $P_{max}$ Рассчитать количество тепла, передаваемого от точки  $P_{max}$  к её точкам-соседям: $(P_{max})_{dt} = (P_{max}) * t_{\text{теплопроводности}}$ Рассчитать оставшееся количество тепла для точки  $P_{max}$ : $(P_{max})_t = ((P_{max})_t - (P_{max})_{dt} * (\text{количество\_соседей})) * (1 - \text{теплопотери})$ Рассчитать новое количество тепла для точек-соседей точки  $P_{max}$  ( $PN[i]$ ): $(PN[i])_t = ((PN[i])_t + (P_{max})_{dt}) * (1 - \text{теплопотери})$ 

кон.

**алг. Генерации пути раскраивающего инструмента с учетом тепловых воздействий на материал**

нач.

 $EndOfTransition = 0$ 

Для стартовой позиции режущего инструмента определить ближайшую точку, принадлежащую одному из контуров, доступных для вырезания, в  $CuttingShapes[EndOfTransition]$ , задать её в качестве начальной для  $CuttingShapes[EndOfTransition]$  и переместить режущий инструмент в эту точку.

Добавить  $CuttingShapes[EndOfTransition]$  в  $ResultShapes[]$ Начать вырезание  $CuttingShapes[EndOfTransition]$ нц пока есть невырезанные точки в  $CuttingShapes[EndOfTransition]$ 

Вырезать очередную точку контура  $CuttingShapes[EndOfTransition]$  и рассчитать распространение температуры в локальной области выреза.

кц

если есть не вырезанные контуры в  $CuttingShapes[]$ 

то

 $StartOfTransition = EndOfTransition$ 

Среди не вырезанных контуров из  $CuttingShapes[]$  найти индекс контура, который будет доступен для вырезания, ближайшим к контуру

$CuttingShapes[StartOfTransition]$ , но на расстоянии, не меньше, чем  $S_{min}$  от последней вырезанной точки со средней температурой в локальных областях, не превышающей значения  $T_{max}$ .

если индекс найден,

то

 $S_{min} = S_{min} * d$ Записать найденный индекс в  $EndOfTransition$ 

иначе

Выбрать наименее нагретый контур.

кон.

Определить ближайшую точку, принадлежащую контуру

 $CuttingShapes[EndOfTransition]$ , до точки врезки в контур $CuttingShapes[StartOfTransition]$ , задать её в качестве начальной для $CuttingShapes[EndOfTransition]$  и переместить режущий инструмент в эту точку.Добавить  $CuttingShapes[EndOfTransition]$  в  $ResultShapes[]$ Начать вырезание  $CuttingShapes[EndOfTransition]$ 

кон.

Вернуть режущий инструмент на стартовую позицию.

кон.

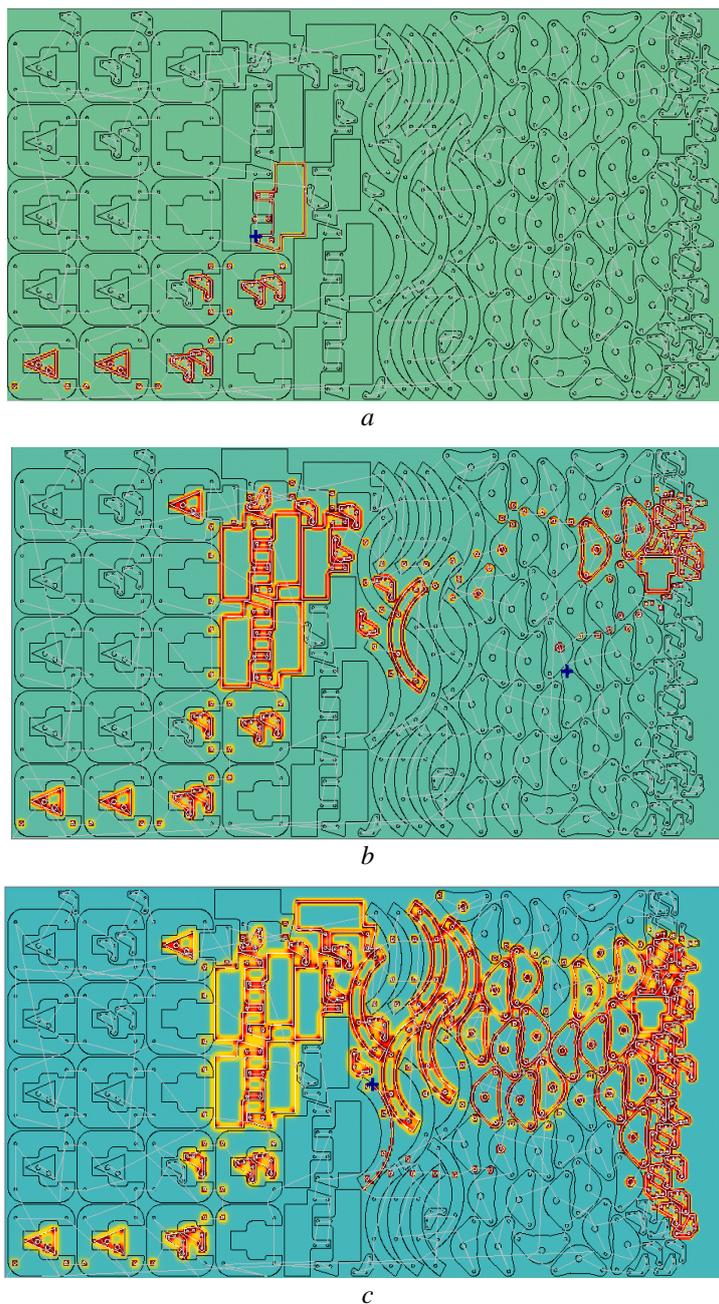
### 3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для апробации разработанных методов и алгоритмов был проведен вычислительный эксперимент на базе примера из [11].

В роли показателя при моделировании процесса раскроя с учетом термических воздействий было выбрано количество локальных перегревов материала.

Сравнивались четыре алгоритма [11, 13]: «Кратчайшего пути», «Минимизации перегревов», «Случайные переходы» и «Минимизации пути и перегревов с учетом температуры в реальном времени», разработанный в данной работе и основанный на определении температуры в масштабе реального времени.

На рис. 3 приведен пример карты раскроя с учетом «дополнительных ограничений».



**Рис. 3** Схема раскроя, траектория движения инструмента с учетом «дополнительных ограничений» и изменения температуры листа в процессе резки с использованием алгоритма «Минимизации пути и перегревов с учетом температуры в реальном времени»:  $a - t_1$ ;  $b - t_2$ ;  $c - t_3$  ( $t_1 < t_2 < t_3$ )

Результаты экспериментов представлены в таблице.

Таблица

### Результаты экспериментов

	Алгоритм			
	«Кратчайшего пути»	«Минимизации перегревов»	«Случайных переходов»	«Минимизации пути и перегревов с учетом температуры в реальном времени»
Длина пути холостого хода, см	2086	27 382	20 542	8582
Кол-во локальных перегревов	431	351	344	376

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен подход к решению задачи построения ЦД процесса тепловой резки плоского материала с учетом термических воздействий, основанный на воксельном представлении информации, включающий в себя математическую модель, методы, алгоритмы и программное обеспечение [14]. По результатам проведенного эксперимента разработанный авторами алгоритм показал эффективность на 14 % выше алгоритма «Кратчайшего пути». Длина пути холостого хода при использовании разработанного алгоритма возросла в 4.1 раза по сравнению с алгоритмом «Кратчайшего пути».

В контексте данного исследования авторы считают полезным упомянуть работу [15] по сходной тематике.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- [1] Wilkins J. 2017 How Industry 4.0 Impacts Globalization [Online] Available: <https://www.manufacturingglobal.com/technology/how-industry-40-impacts-globalisation> [Accessed 06.04.2021].
- [2] Davis N. 2016. What is the Fourth Industrial Revolution? [Online] Available: <https://www.weforum.org/agenda/2016/01/what-is-the-fourth-industrial-revolution> [Accessed 06.04.2021].
- [3] Wäscher G., Haußner H., Schumann H. "An improved typology of cutting and packing problems" // European Journal of Operational Research. 2007. No. 183. Pp. 1109–1130. DOI [10.1016/j.ejor.2005.12.047](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.12.047). EDN XZYQBZ.
- [4] Yang W., Zhao Y., Jie J., Wang W. "An effective algorithm for tool path airtime optimization during leather cutting" // Advanced Material Research. 2010. Pp. 373–377. DOI [10.4028/www.scientific.net/AMR.102-104.373](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.102-104.373).
- [5] Tavaeva A., Petunin A., Ukolov S., Krotov V. "A cost minimizing at laser cutting of sheets parts on CNC machines" // Communications in Computer and Information Science. 2019. Pp. 422–437. DOI [10.1007/978-3-030-33394-2\\_33](https://doi.org/10.1007/978-3-030-33394-2_33). EDN HEZGLB.
- [6] Tavaeva A. F., Petunin A. A., Polishchuk E. G. "Methods of cutting cost minimizing in problem of tool route optimization for CNC laser machines" // Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2020. DOI [10.1007/978-3-030-22063-1\\_48](https://doi.org/10.1007/978-3-030-22063-1_48). EDN KFLJNL.
- [7] Petunin A. A. "General model of tool path problem for the CNC sheet cutting machines" // IFAC-PapersOnLine. 2019. Vol. 52 (13). Pp. 2662–2667. DOI [10.1016/j.ifacol.2019.11.609](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2019.11.609). EDN FCDGEP.
- [8] Petunin A. A., Polishchuk E. G., Chentsov A. G., Chentsov P. A., Ukolov S. S. "About some types of constraints in problems of routing" // AIP Proc. Int. Conf. 2016. Vol. 1789. 060002. DOI [10.1063/1.4968494](https://doi.org/10.1063/1.4968494). EDN XNCCYP.
- [9] Chentsov A. G., Chentsov P. A., Petunin A. A., Sesekin A. N. "Model of megapolises in the tool path optimization for CNC plate cutting machines" // International Journal of Production Research. 2018. 56(1). DOI [10.1080/00207543.2017.1421784](https://doi.org/10.1080/00207543.2017.1421784). EDN MAQOVV.
- [10] Verkhoturov M., Petunin A., Verkhoturova G., Danilov K., Kurennoy D. "The 3D object packing problem into a parallelepiped container based on discrete-logical representation" // IFAC-PapersOnLine. 2016. 49 (12). 1–5. DOI [10.1016/j.ifacol.2016.07.540](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.540). EDN XFMPKJ.
- [11] Verkhoturov M. et al. "Digital twin of the process of thermal cutting of flat material into figured parts" // ICCS-DE. 2021. Pp. 209–219. DOI [10.47350/ICCS-DE.2021.16](https://doi.org/10.47350/ICCS-DE.2021.16).
- [12] Verkhoturov M. A. Задача нерегулярного раскроя фигурных заготовок: оптимизация размещения и пути режущего инструмента // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9. № 2 (20). С. 106–118. EDN [IBJMQX](https://doi.org/10.1016/j.ijm.2007.09.002). [[Verkhoturov M. A. "The problem of irregular cutting

- of shaped blanks: optimization of placement and path of the cutting tool" // Bulletin of Ufa State Agrarian University. 2007. Vol. 9, no. 2 (20), pp. 106–118. EDN [IBJMQX](#). (In Russian).]]
- [13] Верхотуров М. А., Верхотурова Г. Н. О предварительной обработке информации о заготовках в задачах плоского фигурного раскроя // СИИТ. 2023. Т. 5. № 1(10). С. 25–33. EDN [BOPKWP](#). [[Verkhoturov M. A., Verkhoturova G. N. "On preliminary processing of information about blanks in problems of flat figured cutting" // SIIT. 2023. Vol. 5, no. 1(10), pp. 25–33. EDN [BOPKWP](#). (In Russian).]]
- [14] Верхотуров М. А., Верхотурова Г. Н. Об одном способе построения No-Fit Polyhedron при решении задачи плотного размещения трёхмерных объектов // СИИТ. 2023. Т. 5. № 6(15). С. 50–56. EDN [WVTNES](#). [[Verkhoturov M. A., Verkhoturova G. N. "On one method of constructing No-Fit Polyhedron when solving the problem of dense placement of three-dimensional objects" // SIIT. 2023. Vol. 5, no. 6(15), pp. 50–56. EDN [WVTNES](#). (In Russian).]]
- [15] Петунин А. А. Оптимизационные и геометрические проблемы интегрированной задачи нерегулярного 2d раскроя и маршрутизации // СИИТ. 2025. Т. 7. № 1(20). С. 28–39. EDN [KJONDW](#). [[Petunin A. A. "Optimization and geometric problems of the integrated problem of irregular 2d cutting and routing" // SIIT. 2025. Vol. 7, no. 1(20), pp. 28–39. EDN [KJONDW](#). (In Russian).]]

*Поступила в редакцию 3 февраля 2025 г.*

#### МЕТАДАННЫЕ / METADATA

**Title** About modeling the process of thermal cutting of flat material into shaped parts and its digital twin based on voxel representation.

**Abstract.** The paper considers the problem of constructing a digital twin (DT) of the thermal cutting process of sheet material, which occurs when cutting using laser, gas, etc. equipment. The purpose of constructing such a DT is to solve the problem of optimizing the path of the cutting tool, considering the thermal effects on the material being cut. The problem statement is given. An approach to modeling changes in the temperature of the material being cut based on a voxel representation of information is proposed. The results of a computational experiment are given.

**Key words** artificial intelligence, R language, approach, method, socio-economic process.

**Язык статьи / Language** Русский / Russian.

#### Об авторах / About the authors:

##### **ВЕРХОТУРОВ Михаил Александрович**

Уфимский университет науки и технологий, Россия.

Проф. каф. информатики. Дипл. инж.-системотехник (Уфимск. авиац. ин-т, 1983). Д-р техн. наук (Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, 2001). Иссл. в обл. оптимизационного геометрического моделирования и проектирования.

E-mail: [verhotur\\_m@rambler.ru](mailto:verhotur_m@rambler.ru)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6906-0760>

##### **ВЕРХОТУРОВА Галина Николаевна**

Уфимский университет науки и технологий, Россия.

Доц. каф. выч. математики и кибернетики. Дипл. инж.-системотехник (Уфимск. авиац. ин-т, 1983). Канд. техн. наук (Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, 1998). Иссл. в обл. моделирования размещения двумерных и трехмерных объектов.

E-mail: [verhoturova.gn@yandex.ru](mailto:verhoturova.gn@yandex.ru)

##### **ХАННАНОВ Наиль Камилевич**

Уфимский университет науки и технологий, Россия.

Аспир. каф. информатики. Дипл. инж.-системотехник (Уфимск. ун-т науки и технологий, 2023). Готовит дисс. в обл. искусственного интеллекта и цифровых двойников.

E-mail: [nael20000@yandex.ru](mailto:nael20000@yandex.ru)

##### **VERKHOTUROV Mikhail Aleksandrovich**

Ufa University of Science and Technology, Russia.

Prof., Dept. of Informatics. Dipl. System Analyst (Ufa State Aviation Inst., 1983). Dr. Tech. Sci. (Ufa State Aviation Technical University, 2001). Research in the field of optimization geometric modeling and design.

E-mail: [verhotur\\_m@rambler.ru](mailto:verhotur_m@rambler.ru)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6906-0760>

##### **VERKHOTUROVA Galina Nikolaevna**

Ufa University of Science and Technology, Russia.

Assoc. Prof. of the Dept of Computing Mathematics and Cybernetics. Certificated engineering system technician (Ufa Aviat. Institute, 1983). Cand. tech. sciences (Ufa. State Aviat. Techn. Univ., 1998). Research in the field of modeling the placement of 2D and 3D objects.

E-mail: [verhoturova.gn@yandex.ru](mailto:verhoturova.gn@yandex.ru)

##### **KHANNANOV Nail' Kamilevich**

Ufa University of Science and Technology, Russia.

Postgrad. (PhD) Student, Dept of Informatics. Dipl. systems engineer (UUST, 2023). Research in the field of artificial intelligence and digital twins.

E-mail: [nael20000@yandex.ru](mailto:nael20000@yandex.ru)