

Регрессионная модель дифференцируемой оценки опасности столкновения мобильного робота с препятствием

А. Р. Фаттахов • К. И. Инсапов • К. В. Миронов

Уфимский университет науки и технологий

Рассматривается подход к обеспечению уклонения мобильного робота от столкновения с препятствиями при движении вдоль заданного пути. Задача локальной оптимизации траектории формулируется с учетом необходимости следовать заданному пути и находиться на безопасном расстоянии от препятствий. Основная сложность при этом связана с необходимостью представить опасность столкновения в виде непрерывно дифференцируемой функции от положения робота на заданной карте. В литературе такая функция задается либо через аппроксимацию препятствий простыми геометрическими формами, либо с помощью вычислительно емких нейросетевых моделей. Предлагается иной подход, основанный на использовании низкоресурсного алгоритма классического обучения, способного быстро обучаться на аппроксимацию заданной карты препятствий. Суть подхода состоит в аппроксимации функции опасности столкновений на основе полиномиальной регрессионной модели. Разработанный метод реализован с использованием численного солвера Acados для решения задач оптимального управления. Сравнительные эксперименты показали, что использование полиномиальной модели 12-й степени обеспечивает повышение качества планирования траекторий. Суммарное время обучения и оптимизации траектории составляет несколько десятков миллисекунд, что удовлетворяет стандартному требованию для бортовых систем – возможности перепланирования с частотой не менее 10 Гц

Мобильные роботы; планирование движения; избегание столкновений; регрессия; оптимизация траектории.

ВВЕДЕНИЕ

Выбор траектории играет важную роль при управлении робототехническими системами различных типов: промышленными роботами [Пуш24, Орп24, Мир24а–Мир25в], колесными мобильными платформами [Нас24, Мир23, Мир23б, Мур24, Mir24], беспилотными летательными аппаратами [Гур24, Мус24, Хал25] и др. Эта задача имеет много аспектов – технических, архитектурных, методологических, этических [Gay17, Мир23, Box23, Beh25].

Возможность самостоятельного планирования движения мобильного робота является обязательным условием его автономного функционирования. В современных робототехнических системах планирование как правило выполняется в два этапа. Сначала производится глобальное планирование. Задача глобального планирования состоит в том, чтобы на основе известных начальной и конечной конфигураций робота, а также карты препятствий, составить последовательность промежуточных положений, перемещаясь по отрезкам, между которыми робот может достичь конечного положения. Эта задача успешно решается с использованием эвристического [Har68] или вероятностного [Kav96, LaV01] поиска.

После того как спланирован глобальный путь, выполняется второй этап – локальное планирование, в ходе которого глобальный путь преобразуется в локальную траекторию, учитывающую кинодинамические ограничения мобильного робота. Локальная траектория часто строится непосредственно в ходе движения робота, в режиме скользящего окна. Это позволяет

учесть при планировании данные о реальном положении препятствий, поступающие от сенсоров в реальном времени. Задача локального планирования часто решается вероятностными [Wil16] или численными [Sch20] методами оптимального управления. Численные методы обеспечивают более надежные решения, но требуют, чтобы задача оптимизации была сформулирована в виде конкретной системы уравнений. Вероятностные методы не предъявляют такого требования, однако могут давать некорректные или осциллирующие решения.

В данной работе рассматривается подход к уклонению от препятствий при решении задачи локального планирования численными методами. Такое уклонение может быть реализовано двумя способами: либо в постановку задачи добавляется система ограничений-неравенств, обеспечивающих отсутствие столкновений [Sch20], либо в функцию стоимости добавляется дополнительное слагаемое (репульсивный потенциал препятствий), содержащее оценку опасности столкновения с препятствиями [Алх23]. Второй подход обеспечивает более гибкое уклонение от столкновений и может сходится к корректному решению, даже если глобальный план задевает препятствия. Сложность этого подхода в том, что функция опасности столкновений должна быть непрерывно-дифференцируемой на всей карте: ее градиент используются, чтобы «выталкивать» траекторию из опасных областей.

Можно выделить два представленных в литературе подхода к заданию функции отталкивающего потенциала: аппроксимацию карты препятствий набором простых геометрических форм, и оценка потенциала с помощью обучаемых моделей. Первый подход рассматривается в ряде работ: в [Sch20] используется аппроксимация свободного пространства кругами, в [Sch20b] – аппроксимация свободного пространства квадратами, в [Алх23] – аппроксимация препятствий кругами, в [Zie14] – аппроксимация границ препятствий ломаной, в [Log25] – аппроксимация препятствий выпуклыми многоугольниками. Минусом такого подхода является сложность учета препятствий на карте произвольной формы.

При использовании второго подхода опасность столкновения оценивается нейросетевой моделью. В ранних работах [Ada22, Kur22] нейросетевая модель предобучалась на одну заданную карту и работала только в ее пределах. В последующих работах [Alh24, Jac24] обученная нейросетевая модель принимает на вход актуальные данные от препятствий и, таким образом, может использоваться в различных средах. Такая модель становится достаточно ресурсоемкой и время вычисления на ней может составлять сотни миллисекунд при том, что стандартным требованием для автономных транспортных средств является возможность перепланирования с частотой 10 Гц. Процедура обучения нейросети на отдельную карту в свою очередь является весьма ресурсоемкой процедурой, которая не может осуществляться в реальном времени при каждом перепланировании.

Мы предлагаем метод аппроксимации препятствий легкой обучаемой моделью, которая может настроиться на заданную карту в течение короткого времени. Это позволяет выполнить как обучение модели, так и оптимизацию траектории в рамках одной операции перепланирования траектории, выполнения в реальном времени. В качестве модели используется полиномиальная регрессионная модель заданной степени. Далее приводится математическая постановка задачи локальной оптимизации траектории, описывается предложенный подход, описываются особенности реализации и результаты вычислительных экспериментов.

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ПО ТРАЕКТОРИИ

Формальная постановка задачи оптимизации траектории. Рассмотрим задачу MPC – Model Predictive Control (метод управления, при котором используется математическая модель системы для прогнозирования её будущего поведения на определённом горизонте предсказания) для нелинейной системы с непрерывной динамикой и кусочно-постоянным управлением:

$$\{x_{\text{opt}}[i], y_{\text{opt}}[i]\}_{i=k}^{k+m} = \arg(\min_{x,u,p} \sum_{i=k}^{k+m} J(x[i], y[i], p[i])), \quad (1)$$

$$\frac{dx_\mu[i]}{dt} = f_\mu(x[i], u[i], p[i]). \quad (2)$$

Оптимизируемый процесс управления состоит из m шагов, на каждом из которых производится переключение управляющих воздействий. Пусть $x[i]$ – μ -мерный вектор переменных, описывающих состояние объекта управления в начале $[i]$ -го шага; $u[i]$ – v -мерный вектор управляющих воздействий, непрерывно прилагаемых к объекту управления в течение $[i]$ -го шага; $p[i]$ – k -мерный вектор параметров процесса, используемых в расчетах для $[i]$ -го шага. Выражение (1) задает функцию стоимости J , складывающуюся из значений $J[i]$, рассчитанных по единому алгоритму для каждого шага. Суть оптимизации в том, чтобы подобрать значения управляющих воздействий, обеспечивающих минимальное значение J . Выражение (2) задает непрерывную модель динамики процесса (для каждой переменной состояния – зависимость ее производной от остальных состояний, управляемых переменных и параметров процесса в любой момент времени). Для дискретной динамики уравнение (2) примет несколько другой вид:

$$x_\mu[i+1] = f_\mu(x[i], u[i], p[i]). \quad (3)$$

Процедура оптимизации начинается с начального приближения $\{x_{\text{init}}[i], u_{\text{init}}[i]\}_{i=k}^{k+m}$, которое может не удовлетворять модели динамики (в нашем случае значения x_{init} берутся из глобального плана, построенного алгоритмом Theta*, а u_{init} заполняются нулями). На каждой итерации оптимизации солвер смещает текущую траекторию (на первом шаге траектория равна начальному приближению, на каждом следующем – результату предыдущей итерации) так, чтобы снизить значение функции стоимости J , при этом удовлетворяя модели динамики и ограничениям.

Модель динамики для колесного робота. Вектор состояний включает координаты колесного робота и его ориентацию, также в зависимости от модели динамики он может включать линейную и угловую скорости, угол поворота рулевых колес и т. д. Вектор управляющих воздействий в зависимости от модели может включать линейные и угловые скорости и ускорения колесного робота, скорость поворота рулевого колеса и т. д. Например, можно указать модель с дифференциальным приводом (повороты платформы обеспечиваются вращением левых и правых колес с разной скоростью; дифференциальный привод имеет используемый в лабораторных экспериментах мобильный робот Husky) и велосипедную модель (описывает транспортные средства с рулевыми колесами, в т.ч. автомобили). Для велосипедной модели вектор состояний $\mathbf{x} = (x, y, v, \theta, \delta)^T$, где x, y – координаты транспортного средства, v – линейная скорость, θ – направление движения транспортного средства, δ – угол поворота рулевых колес. Вектор управлений $\mathbf{u} = (a, \omega)^T$, где a – линейное ускорение, ω – скорость поворота рулевых колес. Выражение (2) принимает следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \theta, \quad \frac{dv}{dt} = a, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{v \tan \delta}{L}, \quad \frac{d\delta}{dt} = \omega, \quad (3)$$

где $L = \text{const}$ – расстояние между осями колесного робота.

Модель с дифференциальным приводом:

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \theta, \quad \frac{dv}{dt} = a, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega. \quad (4)$$

В отличие от предыдущей модели здесь ω – это угловая скорость всей платформы.

Функция стоимости. Рассмотрим функцию стоимости в задаче оптимизации, определяющую степень оптимальности для заданного положения робота при движении по траектории:

$$J[i] = J_s(x[i], u[i], x_r[i]) + J_o(x[i], p_o[i]) \quad (5)$$

Минимизация слагаемого J_s (гравитационный потенциал) обеспечивает близость положения робота к референтному значению x_r , взятому из глобального плана, в то время как минимизация слагаемого J_o (репульсивный потенциал препятствий) обеспечивает отталкивание траектории на безопасное расстояние от препятствий. Вектор $p_o[i]$ содержит параметры, описывающие препятствия. Вектор параметров задачи из системы (1) в этом случае определяется как $p[i] = ((x_r[i])^T, (p_o[i])^T)^T$.

$$J_s[i] = \sum_{j=1}^{\mu} w_{xj} (x_j[i] - x_{j(\text{ref})}[i])^2 + \sum_{k=1}^{\nu} w_{uk} u_k^2[i] \quad (6)$$

Здесь w_{xj} , w_{uk} весовые коэффициенты соответствующих слагаемых, $x_{j(\text{ref})}[i]$ – референсные значения (берутся с глобального плана движения в виде ломаной).

Репульсивный потенциал должен принимать высокие значения внутри препятствий, низкие вдали от препятствий, а у границы препятствий должен иметь максимальный градиент (в ходе процедуры оптимизации градиент определяет направление, в котором оптимизатор «выталкивает» траекторию подальше от препятствий).

Пусть известна бинарная карта препятствий (Occupancy Grid, OG – плоскость, в которой движется робот, расчерчена на клетки-ячейки, каждая ячейка помечается как занятая или свободная). На основе этой карты для любой точки можно алгоритмически рассчитать так называемую функцию расстояния со знаком (Signed Distance Function, SDF) – она равна расстоянию до ближайшей границы препятствия со знаком плюс (если точка вне препятствия) или минус (если точка внутри препятствия). На основе OG и SDF строится Signed Distance Map – матрица той же размерности, что OG, в каждой ячейке которой указывается значение SDF.

Значения потенциала можно рассчитать, как сигмоидную функцию от SDF. Пример для логистической функции:

$$J_o = w_1(1 - (1 + e^{-(SDF - s_0)})^{-w_2}). \quad (7)$$

Здесь используются весовые коэффициенты: w_1 , w_2 , s_0 – сдвиг сигмоиды по оси абсцисс.

Функция расчета репульсивного потенциала от SDF удовлетворяет требованиям, сформулированным выше: потенциал принимает высокие значения внутри препятствий, низкие вдали от препятствий, а у границы препятствий имеет максимальный градиент. Проблема в том, что SDF сама по себе не является дифференцируемой функцией. Она рассчитывается алгоритмически, ее значения можно подсчитать в любой точке, но задать ее аналитический градиент в общем случае нельзя.

РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ

Предлагается использовать модель полиномиальной регрессии для аппроксимации карты знаковых расстояний (Signed Distance Map, SDM). Исходными признаками являются две независимые переменные, x_1 и x_2 (в нашем случае координаты на карте). Модель строится путем преобразования исходного пространства признаков в расширенное, включающее все полиномиальные комбинации x_1 и x_2 вплоть до заданной степени n . Для двух признаков это преобразование генерирует $(n+1)(n+2)/2$ уникальных членов. Это связано с тем, что одночленов суммарной степени n ровно $n+1$, и при этом также учитываются меньшие степени.

Полученная модель остается линейной относительно своих параметров, что обеспечивает возможность эффективной процедуры обучения методом наименьших квадратов, временная сложность которого равна $O(whn^4)$, где w и h – ширина и высота карты в пикселях соответственно. Результат обучения модели представляет собой полином вида

$$\hat{y} = t[0] + t[1]x_1 + t[2]x_2 + t[3]x_1^2 + t[4]x_1x_2 + \dots \quad (8)$$

Идея метода состоит в поиске вектора весовых коэффициентов (в нашем обозначении t), которые при подстановке в полином минимизировали бы квадратичное отклонение от эталонных значений:

$$t = \arg(\min_l ||Xl - y||_2^2), \quad (9)$$

где X – матрица, состоящая из строк вида

$$X_k = (1, x_{1i}, x_{2j}, x_{1i}^2, x_{1i}x_{2j}, x_{2j}^2, \dots). \quad (10)$$

В свою очередь, y – векторизация матрицы значений SDF из SDM:

$$y = (\text{SDM}[1,1], \text{SDM}[1,2], \dots, \text{SDM}[2,1], \dots, \text{SDM}[h,w])^T, \quad (11)$$

где i -я строка матрицы X должна соответствовать i -му элементу y по индексам.

Весовые коэффициенты находятся следующим образом:

$$t = (X^T X)^{-1} X^T y. \quad (12)$$

Мы используем метод полиномиальной регрессии для аппроксимации SDF, после чего обученная модель используется для решения задачи локальной оптимизации траектории.

Вектор параметров о препятствиях p_o в данном подходе состоит из значений весовых коэффициентов t .

ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Реализация алгоритмов. Алгоритмы были реализованы на языке программирования Python. Для формирования карт знаковых расстояний (Signed Distance Map, SDM) использовалась специализированная библиотека scikit-fmm¹. Аппроксимация полученных значений SDF выполнялась с помощью библиотеки scikit-learn (полиномиальная регрессия, реализованная как комбинация преобразования полиномиальных признаков и линейной регрессии). Построенная регрессионная модель уже участвовала в формулировке и решении задачи локальной оптимизации траектории, для которой использовался решатель Acados² через его Python-интерфейс.

Интеграция модели, построенной средствами scikit-learn, в задачу Acados потребовала ее символьного представления. Это было достигнуто путем извлечения коэффициентов полинома из обученной модели и явного формирования полиномиальной функции с использованием символьных переменных (с помощью символьного фреймворка CasADi³).

Бейзлайны. Сравнение предложенного метода проводилось с двумя другими подходами к решению данной задачи. Первый из них отличается от предложенного нами лишь тем, что аппроксимация карты знаковых расстояний производится с помощью символьного фреймворка CasADi. Второй подход (CIAO star [5]) не использует дополнительное слагаемое репульсивного потенциала и подразумевает добавление нелинейного ограничения-неравенства о нахождении робота внутри безопасного круга для каждой точки пути.

Результаты. Приведем пример работы обученной модели при 18 степени полинома – сформированное потенциальное поле для одной из карт размером 64 на 64 пикселя. На изображении (рис. 1) справа представлен необработанный файл карты, слева график, где цветовым градиентом (по возрастанию от фиолетового к жёлтому) отображены значения репульсивного потенциала. На карте строится траектория движения робота (красная линия) по заданной ломаной (синяя линия) (рис. 2). Она также построена с помощью полиномиальной регрессии. Следует заметить, что тестирование проводилось на картах с ресурса Moving AI Lab⁴ со стороной пикселя, соответствующей 0,5 м.

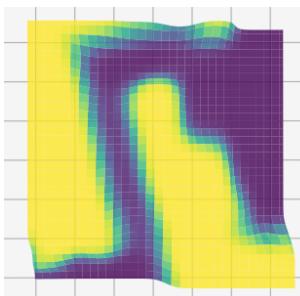


Рис. 1. Потенциальное поле

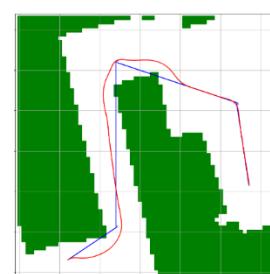


Рис. 2. Траектория движения робота

¹ URL: <https://github.com/scikit-fmm/scikit-fmm>

² URL: <https://docs.acados.org>

³ URL: <https://web.casadi.org>

⁴ URL: <https://movingai.com/benchmarks/grids.html>

После наглядного примера перейдём к числовым данным. Начнём с времени обучения модели (или аналогичного процесса) при аппроксимации значений SDF. Здесь и далее σ – среднее квадратичное отклонение (табл. 1–3).

Обучение модели для аппроксимации с помощью предложенного метода сопоставимо по времени с интерполяцией CasADI при 12-й степени полинома, но медленнее предобработки карты и догадки методом CIAO star.

Таблица 1

Обучение модели для аппроксимации SDF
(размер карты 64×64, средние значения на 5 картах)

Метод аппроксимации		Среднее время обучения модели, сек	σ , пикс.
Sklearn-регрессия, полином степени:	6	0.0122	2.87
	9	0.0177	1.04
	12	0.0334	0.41
	15	0.0950	0.22
	18	0.1276	0.17
	21	0.1488	0.14
Casadi interpolant		0.0355	—
CIAO star (безопасные круги)		0.0071	—

Таблица 2

Обучение модели для аппроксимации SDF
(размер карты 128×128, средние значения на 5 картах)

Метод аппроксимации		Среднее время обучения модели, сек	σ , пикс.
Sklearn-регрессия, полином степени:	6	0.042	11.01
	9	0.121	4.27
	12	0.228	2.06
	15	0.338	1.05
	18	0.537	0.79
	21	0.643	0.70
Casadi interpolant		0.242	—
CIAO star (безопасные круги)		0.023	—

Таблица 3

Обучение модели для аппроксимации SDF
(размер карты 256×256, средние значения на 5 картах)

Метод аппроксимации		Среднее время обучения модели, сек	σ , пикс.
Sklearn-регрессия, полином степени:	6	0.226	58.0
	9	0.513	26.0
	12	1.058	13.4
	15	1.830	7.3
	18	2.368	5.4
	21	2.922	4.7
Casadi interpolant		1.822	—
CIAO star (безопасные круги)		0.071	—

Теперь перейдём к рассмотрению данных, полученных при построении траекторий (а именно при последовательной оптимизации небольших горизонтов). Для оценки качества также рассчитывается минимальное расстояние до препятствия на всей длине пути. Они по аналогии представлены на разных размерах карт (табл. 4–6).

Таблица 4

Локальная оптимизация траектории с помощью готовой модели
(размер карты 64×64 , средние значения на 5 картах)

Метод аппроксимации		Среднее время решения горизонта, сек	Минимальное расстояние до препятствия по пути, пикс.
Sklearn-регрессия, полином степени:	6	0.0024	-3.22
	9	0.0025	-0.50
	12	0.0026	0.97
	15	0.0026	1.45
	18	0.0027	1.45
	21	0.0027	1.45
	Casadi interpolant	0.0028	1.95
CIAO star (безопасные круги)		0.0025	-1.06

Таблица 5

Локальная оптимизация траектории с помощью готовой модели
(размер карты 128×128 , средние значения на 5 картах)

Метод аппроксимации		Среднее время решения горизонта, сек	Минимальное расстояние до препятствия по пути, пикс.
Sklearn-регрессия, полином степени:	6	0.0025	-1.45
	9	0.0026	-1.50
	12	0.0026	-1.30
	15	0.0026	-0.35
	18	0.0028	-0.35
	21	0.0028	-0.35
	Casadi interpolant	0.0026	1.76
CIAO star (безопасные круги)		0.0040	-0.50

Таблица 6

Локальная оптимизация траектории с помощью готовой модели
(размер карты 256×256 , средние значения на 5 картах)

Метод аппроксимации		Среднее время решения горизонта, сек	Минимальное расстояние до препятствия по пути, пикс.
Sklearn-регрессия, полином степени:	6	0.0026	-4.4
	9	0.0029	-4.4
	12	0.0032	-4.4
	15	0.0031	-2.2
	18	0.0032	-1.5
	21	0.0033	-1.1
	Casadi interpolant	0.0033	2.3
CIAO star (безопасные круги)		0.0056	-1.9

Решения, использующие регрессионную модель, часто более выгодны по времени на стадии локальной оптимизации траектории, чем метод, применяющий интерполяцию из CasADi, но менее выгодны, чем метод CIAO star.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе исследования были разработаны модели полиномиальной регрессии при решении задач локальной оптимизации траектории. Было установлено, что применение этих моделей обычно дает корректные результаты аппроксимации SDF и оптимизации траектории на картах размером 64×64 при степени полинома от 12-й включительно, однако, начиная со степени 15, данный подход проигрывает во времени обучения. Несмотря на возникающий вопрос точности аппроксимации SDF, при небольших размерах карт и степенях полинома порядка 12, использование регрессии sklearn может быть оправдано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ | REFERENCES

- [Ada22] Adamkiewicz M., Chen T., et al. Vision-only robot navigation in a neural radiance world // IEEE Robot. Autom. Lett. 2022. 7 (2), 4606–4613. DOI: [10.1109/LRA.2022.3150497](https://doi.org/10.1109/LRA.2022.3150497).
- [Alh24] Alhaddad Muhammad, Mironov Konstantin, Staroverov Aleksey, Panov Aleksandr. Neural potential field for obstacle-aware local motion planning // In: 2024 IEEE International Conference on Robotics and Automation. ICRA, pp. 9313–9320. DOI: [10.1109/ICRA57147.2024.10611635](https://doi.org/10.1109/ICRA57147.2024.10611635).
- [Beh25] Priyanka Behki, Vaibhavi Shreya, Reshma, Aniya Kumari, Sanskar (2025). Ethical Concerns of Autonomous Vehicles: An AI Framework. // Systems Engineering and Information Technologies, 7(3(22)), 20–28. DOI: [10.54708/2658-5014-SIIT-2025-no3-p20](https://doi.org/10.54708/2658-5014-SIIT-2025-no3-p20). EDN: [HHYJIO](#).
- [Gay17] Gayanov R., Mironov K., Kurenkov D. Estimating the trajectory of a thrown object from video signal with use of genetic programming // 2017 IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology, ISSPIT 2017. Bilbao, 2017. P. 134–138. DOI [10.1109/ISSPIT.2017.8388630](https://doi.org/10.1109/ISSPIT.2017.8388630). EDN [YCCFPN](#).
- [Har68] Hart Peter E., Nilsson Nils J., Raphael Bertram. A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths // IEEE Trans. Syst. Sci. Cybern. 1968. 4(2), 100–107. DOI: [10.1109/TSSC.1968.300136](https://doi.org/10.1109/TSSC.1968.300136).
- [Jac24] Jacquet M., Alexis K. N-MPC for Deep Neural Network-Based Collision Avoidance exploiting Depth Images // 2024 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Yokohama, Japan, 2024, pp. 13536–13542. DOI: [10.1109/ICRA57147.2024.10610572](https://doi.org/10.1109/ICRA57147.2024.10610572).
- [Kav96] Kavraki L. E., Svestka P., Latombe J.-C., Overmars M. H. Probabilistic roadmaps for path planning in high-dimensional configuration spaces // IEEE Trans. Robot. Autom. 1996. 12 (4), 566–580. DOI: [10.1109/70.508439](https://doi.org/10.1109/70.508439).
- [Kur22] Kurenkov M., Potapov A., Savinykh A., Yudin E., Krushkov E., Karpyshov P., Tsetserukou D. NFOMP: Neural field for optimal motion planner of differential drive robots with nonholonomic constraints // IEEE Robot. Autom. Lett. 2022. 7 (4), 10991–10998. DOI: [10.1109/LRA.2022.3196886](https://doi.org/10.1109/LRA.2022.3196886). EDN: [JBYDZU](#).
- [LaV01] LaValle S. M., Kuffner Jr. J. J. Randomized kinodynamic planning // Int. J. Robot. Res. 2001. 20 (5), 378–400. DOI: [10.1177/02783640122067453](https://doi.org/10.1177/02783640122067453).
- [Log25] Logunov Aleksey, Alhaddad Muhammad, Mironov Konstantin, Yakovlev Konstantin, Panov Aleksandr. Polygon decomposition for obstacle representation in motion planning with Model Predictive Control // Engineering Applications of Artificial Intelligence. 2025, Vol. 153, 110690. DOI: [10.1016/j.engappai.2025.110690](https://doi.org/10.1016/j.engappai.2025.110690).
- [Mir24] Mironov K. V., Yudin D. A., Alhaddad M. et al. STRL Robotics: Intelligent Control for Robotic Platform in Human-Oriented Environment // Scientific and Technical Information Processing. 2024. Vol. 51, No. 5. P. 437–451. DOI: [10.3103/S0147688224700357](https://doi.org/10.3103/S0147688224700357). EDN [GELPVX](#).
- [Sch20] Schoels T., Palmieri L., et al. An NMPC approach using convex inner approximations for online motion planning with guaranteed collision avoidance // In: 2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 3574–3580. DOI: [10.1109/ICRA40945.2020.9197206](https://doi.org/10.1109/ICRA40945.2020.9197206).
- [Sch20b] Schoels T., Rutquist P., et al. CIAO*: MPC-based safe motion planning in predictable dynamic environments // IFAC Pap. 2020. 53 (2), 6555–6562. DOI: [10.1016/j.ifacol.2020.12.072](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.072).
- [Wil16] Williams G., Drews P., et al. Aggressive driving with model predictive path integral control // In: 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2016. ICRA, pp. 1433–1440. DOI: [10.1109/ICRA.2016.7487277](https://doi.org/10.1109/ICRA.2016.7487277).
- [Zie14] Ziegler J., Bender Ph., et al. Trajectory planning for bertha — A local, continuous method // In: 2014 IEEE Intelligent Vehicles Symposium Proceedings. 2014, pp. 450–457. DOI: [10.1109/IVS.2014.6856581](https://doi.org/10.1109/IVS.2014.6856581).
- [Алх23] Алхаддад М., Миронов К. В., Дергачев С. А. и др. Локальное планирование траектории колесного робота в ограниченной среде на основе модельного прогнозирующего управления // Робототехника и техническая кибернетика

- тика. 2023. Т. 11, № 3. С. 205-214. DOI: [10.31776/RTCJ.11306](https://doi.org/10.31776/RTCJ.11306). EDN: [MYLPKP](#). [[Alkhaddad M., Mironov K. V., Dergachev S. A., et al. Local trajectory planning of a wheeled robot in a limited environment based on model predictive control // Robotics and Technical Cybernetics. 2023. Vol. 11, No. 3. P. 205-214. (In Russian).]]
- [Box23] Вохминцев А. В. Методология решения проблемы одновременной навигации и построения карты на основе комбинирования визуальных и семантических характеристик окружающей среды // СИИТ. 2023. Т. 5, № 3(12). С. 136-155. DOI: [10.54708/2658-5014-SIIT-2023-no4-p136](https://doi.org/10.54708/2658-5014-SIIT-2023-no4-p136). EDN: [EFOFO](#). [[Vokhminsev A. V. Methodology for solving the problem of simultaneous navigation and map construction based on a combination of visual and semantic characteristics of the environment // SIIT. 2023. Vol. 5, No. 3(12). P. 136-155. (In Russian).]]
- [Гур24] Гурчинский М. М., Тебueva Ф. Б. Обнаружение нарушителя агентами роевых робототехнических систем в условиях недетерминированной среды функционирования // СИИТ. 2024. Т. 6, № 3(18). С. 71-82. DOI 10.54708/2658-5014-SIIT-2024-no3-p71. EDN: [AUVYOX](#). [[Gurchinsky M. M., Tebueva F. B. Detection of an intruder by agents of swarm robotic systems in a non-deterministic operating environment // SIIT. 2024. Vol. 6, No. 3(18). P. 71-82. (In Russian).]]
- [Мир23] Миронов К. В., Алхаддад М., Муравьев К. Ф., Панов А. И. Архитектура для планирования движения и управления мобильным роботом в тесном пространстве // Робототехника и искусственный интеллект: Матер XV Всеросс. науч.-техн. конф., Железногорск, 02 дек. 2023 г. С. 213-218. EDN [UVYSZC](#). [[Mironov K. V., Alkhaddad M., Muravyov K. F., Panov A. I. Architecture for motion planning and control of a mobile robot in a confined space // Robotics and Artificial Intelligence: Proc. XV All-Russian Sci. and Tech. Conf. 2023. P. 213-218. (In Russian).]]
- [Мир23б] Миронов К. В., Юдин Д. А., Алхаддад М. и др. STRL-Robotics: интеллектуальное управление поведением робототехнической платформы в человеко-ориентированной среде // Искусственный интеллект и принятие решений. 2023. № 2. С. 45-63. DOI [10.14357/20718594230204](https://doi.org/10.14357/20718594230204). EDN [BJABJN](#). [[Mironov K. V., Yudin D. A., Alkhaddad M. et al. STRL-Robotics: intelligent control of the behavior of a robotic platform in a human-oriented environment // Artificial Intelligence and Decision Making. 2023. No. 2. P. 45-63. (In Russian).]]
- [Мир24а] Миронов К. В. Transport-by-Throwing – робототехнический способ перемещения предметов перебросом: обсуждение научно-технической задачи // СИИТ. 2024. Т. 6, № 1(16). С. 43–53. EDN: [QGFZBW](#). [[Mironov K. V. Transport-by-Throwing – a robotic method of moving objects by throwing: discussion of the scientific and technical problem. SIIT, 2024. Vol. 6, No. 1(16), pp. 43–53. (In Russian).]]
- [Мир24б] Миронов К. В. Transport-by-Throwing – робототехнический способ перемещения предметов перебросом: обзор используемых методов // СИИТ. 2024. Т. 6, № 3(18). С. 3–48. EDN: [FUUPEN](#). [[Mironov K. V. Transport-by-Throwing – a robotic method of moving objects by throwing: a review of the methods used. SIIT, 2024, Vol. 6, No. 3(18), pp. 3–48. (In Russian).]]
- [Мир25а] Миронов К. В. Transport-by-Throwing – робототехнический способ перемещения предметов перебросом: эксперименты по наблюдению за траекторией объекта // СИИТ. 2025. Т. 7, № 2(21). С. 3–29. EDN: [AGHGVU](#). [[Mironov K. V. Transport-by-Throwing — a robotic method of moving objects by throwing: experiments on observing the trajectory of an object. SIIT, 2025, Vol. 7, No. 2(21), pp. 3–29. (In Russian).]]
- [Мир25б] Миронов К. В. Transport-by-Throwing – робототехнический переброс предметов: алгоритм прогнозирования траектории // СИИТ. 2025. Т. 7, № 4(23). С. 3–28. EDN: [TBEBLS](#). [[Mironov K. V. Transport-by-Throwing – robotic transfer of objects: trajectory prediction algorithm. SIIT, 2025, Vol. 7, No. 4(23), pp. 3–28. (In Russian).]]
- [Мир25в] Миронов К. В. Transport-by-Throwing – робототехнический переброс: эксперименты и реализация // СИИТ. 2025. Т. 7, № 5(24). С. 40–56. DOI: [10.54708/2658-5014-SIIT-2025-no5-p40](https://doi.org/10.54708/2658-5014-SIIT-2025-no5-p40). EDN: [UDALGS](#). [[Mironov K. V. Transport-by-Throwing – robotic transfer: experiments and implementation // SIIT. 2025. Vol. 7, No. 5(24). P. 40–56. (In Russian).]]
- [Мир24] Муравьев К. Ф., Алхаддад М., Панов А. И., Миронов К. В. Иерархическая навигация с избеганием препятствий и прохождением проемов на четырехколесном мобильном роботе // XIV Всеросс. совещ. по проблемам управления, Москва, 17–20 июня 2024 г. 2024. С. 1640-1644. EDN [GAVLSQ](#). [[Muravyov K. F., Alkhaddad M., Panov A. I., Mironov K. V. Hierarchical navigation with obstacle avoidance and passage of openings on a four-wheeled mobile robot // XIV All-Russian Conf. on Control Problems. Moscow, June 17–20, 2024. P. 1640–1644. (In Russian).]]
- [Мус24] Муслимов Т. З. Методы и алгоритмы группового управления беспилотными летательными аппаратами самолетного типа // СИИТ. 2024. Т. 6, № 1(16). С. 3-15. DOI: [10.54708/2658-5014-SIIT-2024-no1-p3](https://doi.org/10.54708/2658-5014-SIIT-2024-no1-p3). EDN: [HOTUZU](#). [[Muslimov T. Z. Methods and algorithms for group control of unmanned aerial vehicles of the aircraft type // SIIT. 2024. Vol. 6, No. 1(16). P. 3-15. (In Russian).]]
- [Нас24] Насибуллаев И. Ш., Даринцев О. В. Алгоритмы планирования траектории движения модульного колесного робота внутри трубы // Динамика и вибраакустика машин (DVM-2024): сб. докл. 7-й междунар. науч.-техн. конф., Самара, 04–06 сент. 2024 г. С. 367-368. EDN [JOCJDG](#). [[Nasibullaev I. Sh., Darintsev O. V. Algorithms for planning the trajectory of a modular wheeled robot inside a pipe // Dynamics and vibroacoustics of machines (DVM-2024): Proc. 7th Int. Sci. and Tech. Conf., Samara, Sept. 04–06, 2024, pp. 367-368. (In Russian).]]
- [Оруд24] Оруджева Г. Э. Моделирование выбора и проектирования мобильного промышленного робота для ГПС // СИИТ. 2024. Т. 6, № 4(19). С. 91-97. DOI: [10.54708/2658-5014-SIIT-2024-no4-p91](https://doi.org/10.54708/2658-5014-SIIT-2024-no4-p91). EDN: [POUZVF](#). [[Orudzheva G. E. Modeling the selection and design of a mobile industrial robot for GPS // SIIT. 2024. Vol. 6, No. 4(19). P. 91-97. (In Russian).]]
- [Пуш24] Пушкирев Д. С., Миронов К. В., Панов А. И. Определение целевой конфигурации мобильного манипулятора в задачах схватки объектов // Труды МФТИ. 2024. Т. 16, № 4(64). С. 65-75. EDN: [SPIEDX](#). [[Pushkarev D. S., Mironov K. V., Panov A. I. Determination of the target configuration of a mobile manipulator in object grasping problems // Proceedings of MIPT. 2024. Vol. 16, No. 4(64). P. 65-75. (In Russian).]]

- [Хал25] Халилов Р. Д., Муслимов Т. З. Сравнение моделей нейронных сетей для автоматического управления полетом квадрокоптера по заданной траектории // СИИТ. 2025. Т. 7, № 5(24). С. 86-108. DOI: [10.54708/2658-5014-SIIT-2025-no5-p86](https://doi.org/10.54708/2658-5014-SIIT-2025-no5-p86). EDN: [AMLCRV](#). [[Khalilov R. D., Muslimov T. Z. Comparison of neural network models for automatic control of a quadcopter flight along a given trajectory // SIIT. 2025. Vol. 7, No. 5(24). P. 86-108. (In Russian).]]

ОБ АВТОРАХ | ABOUT THE AUTHORS

ФАТТАХОВ Айнур Равилевич

Уфимский университет науки и технологий, Россия.

fattahovainur0@gmail.com

Студ. бакалавриата по спец. «Программная инженерия», каф. вычислительной математики и кибернетики.

ИНСАПОВ Клим Ильгизович

Уфимский университет науки и технологий, Россия.

todosomeawesome@gmail.com

Студ. бакалавриата по спец. «Программная инженерия», каф. вычислительной математики и кибернетики.

МИРОНОВ Константин Валерьевич

Уфимский университет науки и технологий, Россия.

mironovconst@gmail.com ORCID: [0000-0002-4828-1345](https://orcid.org/0000-0002-4828-1345)

Доц. каф. вычислительной техники и защиты информации. Дипл. спец. по защите инф-и (Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, 2012). PhD (Техн. ун-т Вены, 2016). Иссл. в обл. робототехники, применения ИИ в техн. системах.

FATTAKHOV Ainur Ravilevich

Ufa University of Science and Technology, Russia.

fattahovainur0@gmail.com

Bachelor's degree student in Software Engineering, Department of Computational Mathematics and Cybernetics.

INSAPOV Klim Ilgizovich

Ufa University of Science and Technology, Russia.

todosomeawesome@gmail.com

Bachelor's degree student in Software Engineering, Department of Computational Mathematics and Cybernetics.

MIRONOV Konstantin Valeryevich

Ufa University of Science and Technology, Russia.

mironovconst@gmail.com ORCID: [0000-0002-4828-1345](https://orcid.org/0000-0002-4828-1345)

Assoc. Prof., Department of Computer Science and Information Security. Information Security Specialist (Ufa State Aviation Tech. Univ., 2012). PhD (Vienna University of Technology, 2016). Research in the field of robotics and intelligent control.

МЕТАДАННЫЕ | METADATA

Заглавие: Регрессионная модель дифференцируемой оценки опасности столкновения мобильного робота с препятствием.

Авторы: Фаттахов А. Р., Инсапов К.И., Миронов К. В.

Аннотация: Рассматривается подход к обеспечению уклонения мобильного робота от столкновения с препятствиями при движении вдоль заданного пути. Задача локальной оптимизации траектории формулируется с учетом необходимости следовать заданному пути и находиться на безопасном расстоянии от препятствий. Основная сложность при этом связана с необходимостью представить опасность столкновения в виде непрерывно дифференцируемой функции от положения робота на заданной карте. В литературе такая функция задается либо через аппроксимацию препятствий простыми геометрическими формами, либо с помощью вычислительно емких нейросетевых моделей. Предлагается иной подход, основанный на использовании низкоресурсного алгоритма классического обучения, способного быстро обучаться на аппроксимации заданной карты препятствий. Суть подхода состоит в аппроксимации функции опасности столкновений на основе полиномиальной регрессионной модели. Разработанный метод реализован с использованием численного солвера Acados для решения задач оптимального управления. Сравнительные эксперименты показали, что использование полиномиальной модели 12-й степени обеспечивает повышение качества планирования траекторий. Суммарное время обучения и оптимизации траектории составляет несколько десятков миллисекунд, что удовлетворяет стандартному требованию для бортовых систем – возможности перепланирования с частотой не менее 10 Гц.

Ключевые слова: Мобильные роботы; планирование движения; избегание столкновений; регрессия; оптимизация траектории.

Язык: Русский.

Статья поступила в редакцию 28 ноября 2025 г.

МЕТАДАННЫЕ | METADATA

Title: Regression model for differentiable assessment of the danger of collision of a mobile robot with an obstacle.

Authors: Fattakhov A. R., Insapov K. I., Mironov K. V.

Abstract: This paper considers an approach to ensuring obstacle avoidance for a mobile robot moving along a given path. The local trajectory optimization problem is formulated taking into account the need to follow the given path and maintain a safe distance from obstacles. The main difficulty with this approach is the need to represent the collision hazard as a continuously differentiable function of the robot's position on a given map. In the literature, such a function is defined either by approximating obstacles with simple geometric shapes or using computationally intensive neural network models. This paper proposes a different approach based on the use of a low-resource classical learning algorithm capable of quickly learning to approximate a given obstacle map. The essence of this approach is to approximate the collision hazard function using a polynomial regression model. The developed method is implemented using the Acados numerical solver for solving optimal control problems. Comparative experiments have shown that the use of a 12th-degree polynomial model improves the quality of trajectory planning. The total time for training and trajectory optimization is several tens of milliseconds, which satisfies the standard requirement for onboard systems – to provide the ability to re-plan with a frequency of at least 10 Hz.

Key words: Mobile robots; motion planning; collision avoidance; regression; trajectory optimization.

Language: Russian.

The article was received by the editors on 28 November 2025.