ISSN 2658-5014 (Print) СИИТ ISSN 2686-7044 (Online)
http://siit.ugatu.su 2026. Т. 8, № 1(25)
СИСТЕМНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
Научное сообщение

УДК 004.8 DOI: 10.54708/SIIT-2026-no1-p111 EDN: XLSAOB

Использование конечной иррациональной системы счисления в АЦП

А. Д. Бадмаев • Н. М. Шерыхалина • Е. Р. Шаймарданова

Уфимский университет науки и технологий

В работе рассматривается применение иррациональных систем счисления с основаниями, равными числам Пизо, при проектировании высокоточных аналого-цифровых преобразователей (АЦП). Проанализированы ключевые свойства чисел Пизо — устойчивость к накоплению ошибок округления и избыточность представления, обеспечивающие повышение помехоустойчивости и точности цифрового кодирования сигналов. Предложен новый принцип построения АЦП, заключающийся в замене целочисленного коэффициента усиления в петле обратной связи на иррациональный коэффициент, равный числу Пизо. Показано, что использование данного подхода позволяет не только перераспределить спектральную плотность шума квантования, как в классических дельта-сигма модуляторах, но и целенаправленно сформировать его частотный спектр, минимизируя погрешность преобразования в пределах рабочей полосы. Выполнено сравнительное обсуждение потенциальных преимуществ предложенной архитектуры по отношению к традиционным решениям.

Иррациональная система счисления, число Пизо, аналого-цифровой преобразователь, шум квантования, дельта-сигма модулятор, спектральная плотность шума.

Введение

Современные системы цифровой обработки сигналов во всех областях техники — от телекоммуникаций до измерительных комплексов — опираются на аналого-цифровые преобразователи (АЦП), обеспечивающие интерфейс между непрерывными физическими сигналами и дискретной вычислительной средой. Несмотря на значительный прогресс в развитии архитектур АЦП, такие проблемы, как шум квантования, нелинейности преобразования и паразитные резонансы в цепях обратной связи, остаются фундаментальными ограничениями точности. Традиционные методы их снижения — увеличение разрядности и частоты передискретизации — сталкиваются с физическими, технологическими и энергетическими барьерами, что стимулирует поиск принципиально новых математических и схемотехнических решений.

Одним из таких направлений является использование иррациональных систем счисления, основанных на числах Пизо (Pisot–Vijayaraghavan numbers) — особом классе алгебраических чисел, все сопряжённые корни которых по модулю меньше единицы. Системы счисления с иррациональным основанием обладают уникальными свойствами: ограниченным ростом ошибки при усечении, устойчивостью к накоплению округлений и избыточностью представления. Эти характеристики открывают возможности для разработки новых алгоритмов и структур цифрового преобразования, устойчивых к шуму квантования.

Рекомендовано к публикации программным комитетом XI Международной научной конференции ITIDS’2025 «Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений», Уфа, 13–15 ноября 2025 г.

Бадмаев А. Д., Шерыхалина Н. М., Шаймарданова Е. Р. Использование конечной иррациональной системы счисления в АЦП // СИИТ. 2026. Т. 8, № 1(25). С. 111-116. DOI: 10.54708/SIIT-2026-no1-p111. EDN: XLSAOB.

Badmaev A. D., Sherykhalina N. M., Shaimardanova E. R. Using finite irrational base numeration systems in ADCs // SIIT. 2026. Vol. 8, no. 1(25), pp. 111-116. DOI: 10.54708/SIIT-2026-no1-p111. EDN: XLSAOB. (In Russian).

Целью данной работы является исследование потенциала применения систем счисления на базе чисел Пизо для построения высокоточных аналого-цифровых преобразователей. В частности, предлагается замена целочисленного коэффициента усиления в петле обратной связи на иррациональный коэффициент Пизо, что позволяет не только «размазать» шум квантования по спектру, но и целенаправленно управлять его спектральной плотностью. Такой подход обеспечивает формирование структуры шума, минимизирующей его влияние на полезный сигнал, и представляет собой новый класс архитектур АЦП, превосходящих традиционные решения по критериям точности и устойчивости.

Иррациональные системы счисления и числа Пизо

В традиционных позиционных системах счисления, таких как десятичная или двоичная, основание является целым числом (10, 2 и т. д.). Вес каждого разряда определяется как основание, возведенное в целую степень (номер разряд). Однако математическая теория систем счисления не ограничивается лишь целыми основаниями. Она допускает использование в качестве основания любого вещественного числа $\beta > 1$. В таком случае произвольное вещественное число $\mathcal{X}$ может быть представлено в виде линейной комбинации степеней основания β с целыми коэффициентами из некоторого конечного множества $\mathfrak{D}$:

$$\mathcal{X} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k \beta^k,$$

где $d_k \in \mathfrak{D}$.

Когда основание β является иррациональным числом, мы получаем так называемую иррациональную систему счисления. Наиболее глубоко изученным и практически значимым классом таких систем являются системы с основаниями, равными числам Пизо.

Числа Пизо: определение и уникальные свойства

Число Пизо (или Pisot–Vijayaraghavan number) – это действительное алгебраическое целое число $\beta > 1$, все сопряженные которого по модулю строго меньше единицы. То есть β это старший корень своего минимального полинома. На полином накладываются следующие условия: все коэффициенты должны быть целыми числами; коэффициент при старшей степени должен быть равен единице. Также все сопряженные корни данного полинома должны находится в поле единичного круга. В работах [Бад24, Bad24, Бад24б] были рассмотрены некие семейства сгущения данных чисел, образованных полиномами вида

$$Q(x) = x^n \mathcal{P}(x) \pm \mathcal{A}(x),$$

где $\mathcal{P}(x)$ – полином сгущения, а $\mathcal{A}(x)$ – полином приближения.

В дальнейшим будут рассмотрены только числа Пизо, расположенные на интервале $(1; 2)$, поскольку только числа на этом интервале будут давать в разложении биномиальные коэффициенты при любом основании β.

Учитывая данные особенности разложение по степеням β, числа Пизо будут иметь такой вид. Для любого целого числа и числа из иррационального поля $Q(\beta)$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{d_i \beta^i} + \sum_{j=-1}^{-m} \boldsymbol{d_j \beta^j}, \quad \boldsymbol{d_j} \in \{\mathbf{0}; \mathbf{1}\}.$$

Заметим, что для любого рационального числа разложения также конечны, но каждое имеет свой период.

Благодаря свойству чисел Пизо такие системы обладают рядом следующих замечательных характеристик.

Избыточность: как и в других системах с нецелым основанием, представление не всегда единственно. Одно и то же число может иметь несколько различных кодовых последовательностей. Эта избыточность открывает возможности для оптимизации, например, для минимизации веса (количества единиц) в представлении числа.

Устойчивость к ошибкам округления: свойство сходимости дробных частей к нулю означает, что ошибки, возникающие при усечении (отбрасывании младших разрядов) или округлении числа, не будут катастрофически накапливаться. Ошибка ограничена и затухает. Это резко контрастирует с системами с основанием, где сопряженные по модулю больше 1 (например, с не числами Пизо), где малая ошибка в младшем разряде может привести к экспоненциальному росту ошибки в старших разрядах [Bla89, Koo20, Бер07].

Эффективное представление: некоторые числа, имеющие бесконечное или очень длинное представление в двоичной системе, могут быть представлены конечной короткой последовательностью в системе Пизо [Хал24, Max10].

Применения иррациональных систем счисления в цифровой обработке

Уникальные математические свойства систем счисления на базе чисел Пизо, в частности их устойчивость и избыточность, делают их чрезвычайно перспективным инструментом за пределами чистой математики. Они находят применение в теории сигналов, цифровой фильтрации и, что наиболее важно для технических наук, в построении принципиально новых архитектур аналого-цифровых преобразователей (АЦП). Как будет показано далее, эти системы позволяют бороться с фундаментальными проблемами традиционных АЦП, такими как шум квантования и паразитные резонансы в структурах с обратной связью.

Аналого-цифровое преобразование

Аналого-цифровой преобразователь (АЦП) – это фундаментальный интерфейс между непрерывным физическим миром и дискретным цифровым миром вычислительных систем. Его основная задача – преобразовать непрерывный аналоговый сигнал (например, напряжение или ток), который может принимать бесконечное множество значений в заданном диапазоне, в дискретную последовательность цифровых кодов (как правило, двоичных), имеющих конечное число возможных состояний.

Процесс преобразования является неотъемлемой частью любой современной цифровой системы, будь то аудио- и видеоаппаратура, измерительные приборы, датчики, системы связи или устройства управления. Без АЦП цифровой процессор не может воспринимать информацию от датчиков, микрофонов, антенн и других источников аналоговых сигналов.

Основные этапы преобразования

Процесс аналого-цифрового преобразования состоит из трех ключевых этапов:

1. **Дискретизация**. На этапе дискретизации непрерывный по времени t аналоговый сигнал $x(t)$ преобразуется в последовательность его мгновенных значений, взятых в определенные моменты времени. Процесс осуществляется с помощью схемы выборки-хранения (Sample-and-Hold, S/H), которая «запоминает» текущее значение сигнала на время, необходимое для следующего этапа. Критически важным параметром здесь является частота дискретизации f_s. Согласно теореме Котельникова-Найквиста, для точного восстановления сигнала без потерь информации частота дискретизации должна быть как минимум в два раза выше наивысшей частоты в спектре исходного сигнала ($f_s \geq 2f_{max}$). Несоблюдение этого условия приводит к явлению наложения спектров.

2. **Квантование**. На этапе квантования непрерывное по амплитуде значение каждого отсчета преобразуется в одно из значений конечного множества дискретных уровней. Диапазон возможных значений аналогового сигнала разбивается на 2^N интервалов (уровней квантования), где N – разрядность АЦП. Каждому отсчету присваивается значение того уровня, в который попадает его амплитуда. Этот процесс необратим и вносит в сигнал неизбежную

погрешность — шум квантования. Чем больше разрядность N, тем больше уровней квантования, и тем меньше ошибка.

3. **Кодирование**: это финальный этап, на котором каждому дискретному уровню квантования ставится в соответствие уникальный N-разрядный двоичный код. Например, уровень 0 может быть закодирован как 000, уровень 5 как 101 и т. д. На выходе этого блока мы получаем последовательность цифровых слов, которые и являются результатом работы АЦП и могут быть обработаны цифровой системой.

Ключевые параметры АЦП

Разрядность (N): определяет динамический диапазон и разрешающую способность АЦП. Измеряется в битах. Разрешение (минимальное detectable изменение напряжения) вычисляется как

$$\Delta = V_{\text{ref}}/2^N,$$

где V_{ref} – опорное напряжение. Динамический диапазон примерно равен $(6.02 \cdot N + 1.76)$ дБ.

Частота дискретизации (f_s): определяет максимальную частоту входного сигнала, которую АЦП может преобразовать без искажений.

Скорость преобразования: выполнение одного полного цикла преобразования (от выборки до выдачи кода) за единицу времени.

Интегральная нелинейность (INL): максимальное отклонение реальной характеристики transfer characteristic АЦП от идеальной прямой линии.

Дифференциальная нелинейность (DNL): ошибка, показывающая, насколько отличается шаг между двумя соседними кодами от идеального значения Δ. Если $DNL > 1$, возможна потеря кодов.

Основные архитектуры АЦП

Существует множество архитектур АЦП, каждая из которых представляет собой компромисс между скоростью, точностью, энергопотреблением и стоимостью.

АЦП последовательного приближения (SAR ADC): один из самых популярных типов благодаря балансу скорости, точности и умеренной мощности. Работает по принципу бинарного поиска. Последовательно сравнивает входное напряжение с напряжениями, генерируемыми цифро-аналоговым преобразователем (ЦАП), и за N тактов определяет N-разрядный код.

Дельта-сигма АЦП (ΔΣ ADC): обеспечивает очень высокую точность (до 24–32 бит) за счет передискретизации и шумоподавления. Принцип действия основан на модуляции входного сигнала и последующей цифровой фильтрации. Идеально подходит для аудио приложений и прецизионных измерений.

Конвейерный АЦП (Pipeline ADC): используется в высокоскоростных приложениях. Состоит из нескольких каскадов (стадий), работающих параллельно над разными отсчетами, что позволяет достигать высокой производительности.

АЦП параллельного преобразования (Flash ADC): самый быстрый тип АЦП. Содержит $(2^N - 1)$ компараторов, которые работают одновременно. Из-за экспоненциального роста сложности и мощности применяется для очень высоких скоростей при небольшой разрядности, обычно до 8 бит.

Связь АЦП и иррациональной системы счисления: подавление шума при квантовании

Ключевой задачей при проектировании аналого-цифровых преобразователей, особенно для высокоточных применений, является управление шумом квантования. Традиционные архитектуры борются с ним путем увеличения разрядности или передискретизации [Sch17, Men23, Pan11, Fro92]. Однако эти методы имеют физические и экономические ограничения.

Использование систем счисления, в основании которых лежат числа Пизо, предлагает принципиально иной подход. Он основан на замене целочисленного усиления в петле обратной связи АЦП на иррациональный коэффициент, которым является число Пизо. Это позволяет не просто «размазать» шум квантования по спектру, как это делает классический дельта-сигма модулятор, а целенаправленно сформировать его спектральную плотность, вытеснив основную энергию ошибки за пределы полосы пропускания полезного сигнала с максимальной эффективностью.

Выводы

В ходе исследования показано, что использование иррациональных систем счисления с основанием, равным числам Пизо, открывает перспективные возможности для повышения точности и устойчивости аналого-цифровых преобразователей. Замена целочисленного коэффициента усиления в петле обратной связи на иррациональный коэффициент Пизо позволяет эффективно формировать спектральную плотность шума квантования, направленно снижая его влияние в рабочей полосе частот. Такой подход обеспечивает дополнительный резерв точности без увеличения разрядности и частоты передискретизации, что делает его особенно привлекательным для систем, чувствительных к энергетическим и аппаратным ограничениям.

Полученные результаты могут быть использованы при разработке новых архитектур дельта-сигма модуляторов и прецизионных АЦП, а также при создании алгоритмов цифровой фильтрации, основанных на свойствах иррациональных чисел. Перспективным направлением дальнейших исследований является построение математических моделей устойчивости и шумовых характеристик АЦП с иррациональными коэффициентами, а также экспериментальная проверка предложенного принципа на аппаратном уровне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ | REFERENCES

[Sch17] Schreier R., Temes G. C. Understanding Delta-Sigma Data Converters. 2nd ed. Hoboken, NJ: Wiley-IEEE Press, 2017.

[Men23] Meng L., Hu Ya., Zhao Y., et al. A 1.2-V 2.87-μ W 94.0-dB SNDR Discrete-Time 2–0 MASH Delta-Sigma ADC // IEEE Journal of Solid-State Circuits. 2023. Vol. 58, No. 6. P. 1636-1645. EDN: SOUYOE.

[Pan11] Panju M. “Beta Expansions for Regular Pisot Numbers” // Journal of Integer Sequences, vol. 14 (2011), Article 11.2.2.

[Li18] Li Y. Q., et al. “Distributions of full and non-full words in beta-expansions” // Journal of Number Theory, vol. 189, 2018, pp. 155-175.

[Bla89] Blanchard F. “β-Expansions and symbolic dynamics” // Ergodic Theory & Dynamical Systems, vol. 9, 1989, pp. 25--56.

[Koo20] Koo S.-C., Lee J. W. “Non-integer base numeration systems and their application to noise shaping” // IEEE Transactions on Circuits and Systems I, vol. 67, no. 4, 2020, pp. 1214-1223.

[Fro92] Frougny C., Solomyak B. “Finite beta-expansions” // Ergodic Theory & Dynamical Systems, vol. 12, 1992, pp. 713-723.

[Бад24] Бадмаев А. Д., Шерыхалина Н. М., Шаймарданова Е. Р. Использование конечной иррациональной системы счисления для передачи бинарного сигнала // Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений ITIDS'2024. Уфа: УУНиТ, 2024. С. 113-117. EDN: WJRIGI.

[Бер07] Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. Цепные дроби, группа GL(2, ℤ) и числа Пизо // Математические труды. 2007. Т. 10, № 1. С. 97-131. EDN: HZNRUR.

[Хал24] Хальзев С. Е., Макарчук В. В., Волков И. В. и др. Высокоуровневое проектирование аналоговых дискретных сигма-дельта модуляторов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия Приборостроение. 2024. № 2(147). С. 125-144. EDN: RASAFQ.

[Max10] Махлин А. Дельта-сигма модуляция: назад в будущее // Компоненты и технологии. 2010. № 11(112). С. 154-158. EDN: NEIPLX.

[Гол] Голуб В. С. Сигма-дельта модулятор: петлевые фильтры и шум квантования //Технология и конструирование в электронной аппаратуре. 2013. №. 2-3. С. 19-27. EDN: QCXRYR.

[Bad24] Badmaev A. D., Sherykhalina N. M., Shaymardanova E. R. Number systems represented by quadratic polynomials // Systems Engineering and Information Technologies. 2024. Vol. 6, No. 2(17). P. 33-38. EDN: LLRWGJ.

[Бад24б] Бадмаев А. Д., Шерыхалина Н. М., Узбекова Л. Я. Аналитический алгоритм разложения натуральных чисел в пиеричную систему счисления // Молодежный вестник УГАТУ. 2024. № 2 (31). С. 5-9. EDN: OQDKKN.

[Шут21] Шутов А. В. Обобщенные разбиения Рози и линейные рекуррентные последовательности // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, № 2(78). С. 313-333. EDN: GYFQTI.

[Бур24] Бурлаков И. Д., Старцев В. В., Яковлев А. Ю. Основные тенденции и направления современного развития фотоэлектроники // Успехи прикладной физики. 2024. Т. 12, № 5. С. 420-439. EDN: GAVTIJ.

ОБ АВТОРАХ | ABOUT THE AUTHORS

БАДМАЕВ Алексей Дмитриевич
Уфимский университет науки и технологий, Россия.
BadmaevAD@uust.ru
Асс. каф. выч. математики и кибернетики.
Дипл. математик (Волгогр. гос. ун-т, 2022).

ШЕРЫХАЛИНА Наталия Михайловна
Уфимский университет науки и технологий, Россия.
n_sher@mail.ru ORCID: 0000-0002-2808-1311.
Проф. каф. выч. математики и кибернетики. Дипл. инж.-с/техник (Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, 1993). Д-р техн. наук по мат. моделированию, числ. методам и комплексам программ (там же, 2012). Иссл. в обл. мат. моделир. течений жидкости и э/хим. формообразования, числ. методов и оценок погрешностей.

ШАЙМАРДАНОВА Екатерина Ринатовна
Уфимский университет науки и технологий, Россия.
shaymardanova.ekaterina.04@gmail.com
Студ. бак-та по мат. обеспечению и администрированию информ. систем.

BADMAEV Aleksey Dmitrievich
Ufa University of Science and Technology, Russia.
BadmaevAD@uust.ru
Assist., Dept. of Computational Maths and Cybernetics.
Dipl. mathematician (Volgograd State University, 2022).

SHERYKHALINA Nataliya Mikhailovna
Ufa University of Science and Technology, Russia.
n_sher@mail.ru ORCID: 0000-0002-2808-1311.
Prof., Dept. Computational Mathematics and Cybernetics, Faculty of Computer science and robotics, UGATU. Dipl. System engineer (UGATU, 1993). Dr. Tech. Sci. (UGATU, 2012). Research in the field of mathematical modeling of fluid flows and electrochemical shaping, numerical methods and error estimates.

SHAYMARDANOVA Ekaterina Rinatovna
Ufa University of Science and Technology, Russia.
shaymardanova.ekaterina.04@gmail.com
Bachelor's degree student in software and information systems administration.

МЕТАДАННЫЕ | METADATA

Заглавие: Использование конечной иррациональной системы счисления в АЦП.

Авторы: Бадмаев А. Д., Шерыхалина Н. М., Шаймарданова Е. Р.

Аннотация: В работе рассматривается применение иррациональных систем счисления с основаниями, равными числам Пизо, при проектировании высокоточных аналого-цифровых преобразователей (АЦП). Проанализированы ключевые свойства чисел Пизо — устойчивость к накоплению ошибок округления и избыточность представления, обеспечивающие повышение помехоустойчивости и точности цифрового кодирования сигналов. Предложен новый принцип построения АЦП, заключающийся в замене целочисленного коэффициента усиления в петле обратной связи на иррациональный коэффициент, равный числу Пизо. Показано, что использование данного подхода позволяет не только перераспределить спектральную плотность шума квантования, как в классических дельта-сигма модуляторах, но и целенаправленно сформировать его частотный спектр, минимизируя погрешность преобразования в пределах рабочей полосы. Выполнено сравнительное обсуждение потенциальных преимуществ предложенной архитектуры по отношению к традиционным решениям.

Ключевые слова: Иррациональная система счисления, число Пизо, аналого-цифровой преобразователь, шум квантования, дельта-сигма модулятор, спектральная плотность шума.

Язык: Русский.

Статья поступила в редакцию 1 февраля 2026 г.

Title: Using finite irrational base numeration systems in ADCs.

Authors: Badmaev A. D., Sherykhalina N. M., Shaimardanova E. R.

Abstract: This paper examines the application of irrational number systems with bases equal to Pisot numbers in the design of high-precision analog-to-digital converters (ADCs). Key properties of Pisot numbers—robustness to rounding error accumulation and representation redundancy—are analyzed, providing increased noise immunity and accuracy of digital signal coding. A new principle for constructing an ADC is proposed, consisting of replacing the integer gain in the feedback loop with an irrational coefficient equal to the Pisot number. It is shown that this approach allows not only to redistribute the spectral density of quantization noise, as in classical delta-sigma modulators, but also to purposefully shape its frequency spectrum, minimizing the conversion error within the operating bandwidth. A comparative discussion of the potential advantages of the proposed architecture compared to traditional solutions is provided.

Key words: Irrational base numeration system, Pisot number, analog-to-digital converter, quantization noise, delta-sigma modulator, noise spectral density.

Language: Russian.

The editors received the article on 1 February 2026.