ISSN 2658-5014 (Print)
2021. Т.3, № 1 (5). С. 58–64
СИИТ
СИСТЕМНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
ISSN 2686-7044(Online)
http://siit.ugatu.su

УДК 519.6

Методика качественного улучшения результатов вычислительного эксперимента

В. П. Житников[1], Н. М. Шерыхалина[2], Г. И. Федорова[3], А. А.Соколова[4]

[1] zhitnik@mail.ru, [2] n_sher@mail.ru, [3] g_fed@mail.ru, [4] alexandrakrasich@gmail.com

Уфимский государственный авиационный технический университет

Поступила в редакцию 25 марта 2021 г.

Аннотация. В данной работе наглядно продемонстрирована эффективность методики качественного улучшения результатов вычислительного эксперимента. На примере решения задач гидродинамики показано, что происходит существенное увеличение надежности создаваемых комплексов для решения задач при применении определенных подходов. Численная фильтрация результатов вычислений дает возможность достичь их высокой точности. Разработанная эвристическая методика многокомпонентного анализа позволяет получить достоверные оценки результатов, и на их основании делать практические выводы о моделируемых явлениях.

Ключевые слова: многокомпонентный анализ; численно-аналитические методы; оценка погрешности; численная фильтрация.

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на стремительное развитие компьютерных технологий, численных методов и средств разработки, проблемы, связанные с верификацией результатов численного эксперимента и оценкой их точности и достоверности, по-прежнему актуальны. Поскольку в компьютере представимы не все числа, а лишь конечный набор рациональных чисел специального вида, для всех остальных чисел возможно лишь приближенное представление с некоторой погрешностью, которую принято называть погрешностью представления или округления. Возникает проблема соотнесения приближенного вычисленного результата с истинным решением поставленной задачи.

Разработка средств контроля и обоснования достоверности получаемых результатов, а также учет всех известных источников неадекватности – важнейшая задача, сопутствующая сегодняшнему быстрому росту технологий.

В связи с этим в монографии [1] был проведен анализ имеющихся средств повышения надежности численных результатов, а также предложен подход, заключающийся в многокомпонентном анализе вычисленных значений. В основе многокомпонентного анализа лежит идея фильтрации численных данных, основанная на априорном знании закона изменения погрешности вычисления от параметра дискретизации (или других параметров) в виде суммы слагаемых известного вида (1) с неизвестными коэффициентами и заключающаяся в поочередном или групповом уничтожении этих компонент погрешности.

$$z_n - z = c_1 n^{-k_1} + c_2 n^{-k_2} + \ldots + c_L n^{-k_L} + \Delta(n), \quad (1)$$

z_n – приближенный результат, полученный при количестве узловых точек или слагаемых суммы, равном n; z – точное значение; c_j – неизвестные коэффициенты; $k_1, \ldots k_L$ – произвольные действительные числа (известные), такие, что $k_1 < k_2 < ... < k_L$. Величина $\Delta(n)$ может состоять из не вошедших в сумму слагаемых, остаточного члена, погрешности округления и других составляющих, обусловленных несовершенством численного метода и его программной реализации. Важно отметить то, что величина $\Delta(n)$ не имеет априорной оценки, и предполагается возможным возрастание этой величины при возрастании n.

При кратном увеличении числа узлов $n_i = n_1 Q^{i-1}$ формула фильтрации совпадает с формулой Ричардсона [1]:

$$z_{n_i}^{(j)} = z_{n_i}^{(j-1)} + \frac{z_{n_i}^{(j-1)} - z_{n_{i-1}}^{(j-1)}}{Q^{k_j} - 1}. \quad (2)$$

Важно отметить, что целью фильтрации, в отличие от методов ускорения сходимостей, является только предоставление дополнительной информации для последующего сравнительного анализа. Поэтому отфильтрованные по формуле (2) значения подвергаются дальнейшему анализу с целью оценки погрешности и обоснованию достоверности этих оценок. Результаты фильтрации и оценки погрешности удобно представлять на графике (рис. 1) в виде зависимости $-\lg\delta$ (десятичного логарифма) абсолютной или относительной погрешности, то есть точности, выраженной в количестве точных десятичных знаков от логарифма n (числа слагаемых суммы или отрезков разбиения). При этом каждая составляющая зависимости (1) представлялась бы на таком графике отрезком прямой.

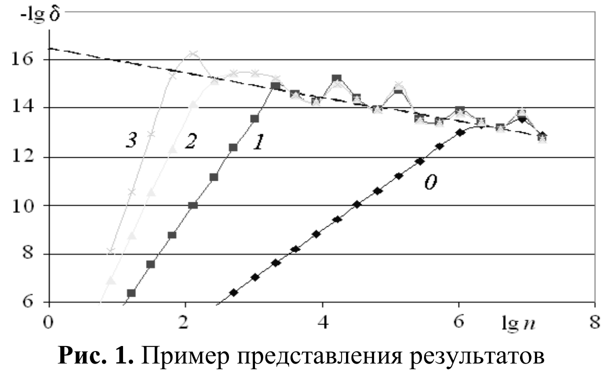


Рис. 1. Пример представления результатов фильтрации

Fig. 1. Example of the filtering results representation

Следует отметить, что разность между ординатами точек, соответствующих конкретному числу n, на графике является десятичным логарифмом отношения погрешностей или оценок погрешностей. Надежные оценки получаются при достаточно большом расстоянии между точками кривых. При этом, применяя предложенные методы анализа численных данных, следует придерживаться специальных правил анализа графика [1].

Примечание. В зависимости от правил увеличения узлов (кратное увеличение, увеличение на некоторое количество единиц и т. д.), а также от представления модели погрешности, меняются и формулы фильтрации. Формула (2) рассматривается как частный случай наиболее часто встречающейся модели разбиения [6].

Таким образом, идея подхода многокомпонентного анализа заключается в нескольковэтапной постпроцессорной обработке вычисленных данных :

– фильтрации результатов численного эксперимента для получения большего количества численных данных для дальнейшего анализа;

– анализе полученных численных данных, получении оценки погрешности результатов;

– проверке сформулированных выводов. Проверкой служит сравнение результатов одной задачи, полученных разными методами, либо, если это возможно, завышение точности получаемых решений, а также комбинация этих подходов.

ПРИМЕНЕНИЕ РАССМОТРЕННОГО ПОДХОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ. ЗАДАЧА О ВОЛНЕ СТОКСА

Рассмотрим задачу об уединенной волне Стокса. Рассматривается плоское стационарное течение идеальной невязкой жидкости со свободными границами. Сравнение результатов различных исследователей показывает, что авторы часто ошибаются в оценке погрешности, причем иногда в 10–100 раз.

В [2] были опубликованы результаты решения этой задачи видоизмененным методом Леви – Чивиты с учетом особенностей решения в точке излома свободной поверхности и на бесконечности. Для уточнения и оценки погрешности была применена формула фильтрации типа Эйткена с использованием метода наименьших квадратов. Полученные оценки дали возможность декларировать точность до 13 знака по числу Фруда и до двух-трех единиц 13 разряда по остальным параметрам. Чтобы понять, справедливы ли оценки, полученные с помощью разработанной методики, было решено разработать новый численно-аналитический метод решения данной задачи. Более того, необходимо использовать машинные слова с увеличенной длиной мантиссы, чтобы получить решения, которые либо опровергнут, либо подтвердят предыдущие.

Перейдем к решению задачи. Пусть струя идеальной жидкости движется вдоль горизонтальной прямолинейной стенки *ADC* (рис. 2, *а*). Сила тяжести действует вертикально вниз. Рассматривается решение типа уединенной волны наибольшей амплитуды, при этом на вершине волны образуется излом с внутренним углом $2\pi/3$ (волна Стокса). Скорость на бесконечности равна V_∞, асимптотическая толщина струи – h. Давление P на свободной границе равно атмосферному P_0.

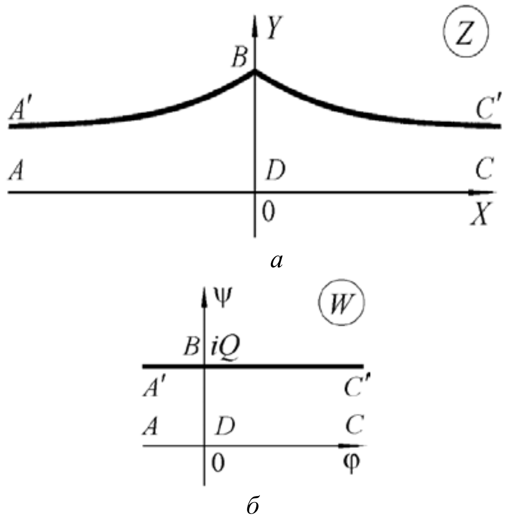


Рис. 2. Формы области, соответствующие течению, на плоскостях: *а – физической*; *б – комплексного потенциала*

Fig. 2. The shapes of the area corresponding to the flow on the planes: *a – physical plane*; *b – complex potential plane*

На свободной поверхности *A'BC'* значение модуля вектора скорости течения V связано с высотой точки Y уравнением Бернулли при $P=P_0$

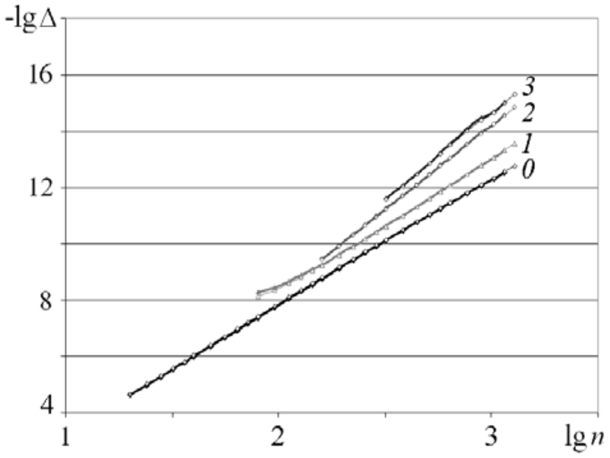
$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2+\frac{2y}{Fr^2h}=\text{const},\quad Fr=\frac{V_\infty}{\sqrt{gh}}.$$

Используя методы ТФКП было получено решение задачи. На плоскости комплексного потенциала области течения соответствует полоса (рис. 2, *б*). Отличительной особенностью метода является использование краевого условия (уравнения Бернулли) в дифференциальном виде:

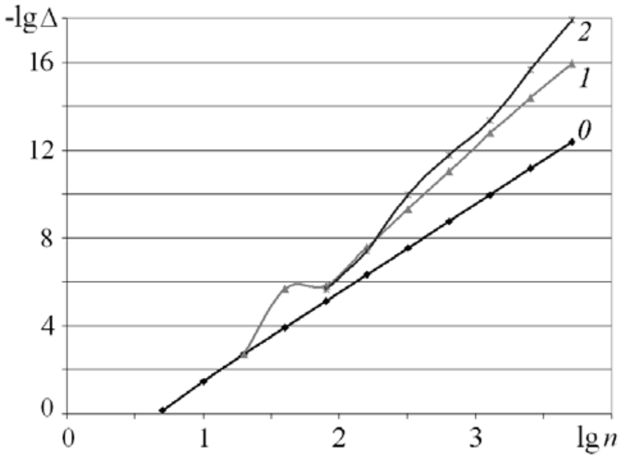
$$e^{3\tau}\frac{d\tau}{d\sigma}-\frac{1}{Fr^2}\sin\theta=0. \tag{3}$$

Численно задача решалась методом коллокаций. Требовалось выполнение уравнения (3) в узловых точках, и дополнительного уравнения, полученного в результате аналитического решения. Полученная при этом система n нелинейных уравнений решалась методом Ньютона с регулированием шага путем минимизации суммы квадратов невязок по всем уравнениям. Поиск решения прекращался, когда невязки по модулю не превышали 10^{-30}. Другой отличительной особенностью уже программной реализации было использование чисел с длиной мантиссы, соответствующей 35 десятичным разрядам. Более того, алгоритмическая реализация многих функций, используемых при решении в [2], была модифицирована, что позволило изменить составляющую погрешности, зависящую от программной реализации численного метода. При проведении процедуры фильтрации использовалась комбинация формул Ричардсона и Эйткена.

Использование предложенного альтернативного метода и расширения мантиссы позволило уменьшить погрешность до 10^{-16} (рис. 3, *б*). Тем самым, оценки, полученные ранее (рис. 3, *а*) с помощью применения идеи фильтрации численных данных, были подтверждены. Сама же методика многокомпонентного анализа проявила себя как полезный инструмент повышения качества результатов численных алгоритмов.



а



б

Рис. 3. Результаты фильтрации числа Фруда:
а – согласно [2]; *б – согласно* [3]

Fig. 3. Results of the Froude number filtering:
a – according to [2]; b – according to [3]

ЗАДАЧА О КАВИТАЦИОННОМ ОБТЕКАНИИ ОБОЛОЧКИ ПО НЕСИММЕТРИЧНОЙ СХЕМЕ РЯБУШИНСКОГО

Задача обтекания идеальной жидкостью воздухоопорной оболочки имеет практическое применение при исследовании взаимодействия ветровой нагрузки с надувными конструкциями типа ангаров и т.п. При решении задач кавитационного обтекания ранее было обнаружено, что зависимости многих параметров течения имеют локальные экстремумы при выполнении условия гладкого отрыва [4]. Строгого доказательства эта гипотеза не имеет. В связи с ограничением точности расчетов и соображениями «здравого смысла» данный вывод вызывал некоторые сомнения, поскольку количество верных знаков, с которыми определяется точка экстремума, как правило, в два раза меньше, чем в вычисленном значении исследуемой функции. Чтобы проверить предположение о наличии локальных экстремумов у параметров обтекания, необходимо получить решение с увеличенной точностью.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, оба конца которой (A и B) закреплены. Скорость потока на свободной линии тока CF равна V_0. На линии DA вектор скорости параллелен оси X (рис. 4).

На смоченной части оболочки AC должно удовлетворяться уравнение равновесия оболочки

$$T = R(P_b - P) = \text{const}\,, \qquad (4)$$

где R – радиус кривизны оболочки ($R > 0$, если оболочка выпукла в сторону жидкости), P – давление на границе; P_b – давление внутри оболочки; T – натяжение оболочки.

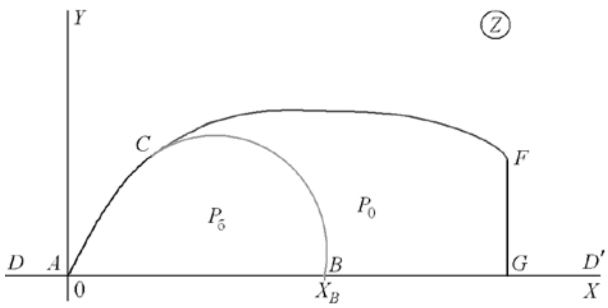


Рис. 4. Схема течения (физическая плоскость)

Fig. 4. Flow diagram (the physical plane)

При небольших перепадах давлений, характерных для обтекания надувных конструкций, воздух можно моделировать идеальной невязкой несжимаемой жидкостью. Тогда условие (4) с учетом уравнения Бернулли можно записать в дифференциальной форме

$$T = \pm\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^{-1}\left(P_b - P^* + \rho\frac{V^2}{2}\right),$$

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{\rho V_0^2}{2T}\left(\mu - 1 + \left|\frac{V}{V_0}\right|^2\right),\ \mu = \frac{P_b - P_0}{P^* - P_0}\,, \qquad (5)$$

где θ – угол между вектором скорости и осью X; s – дуговая абсцисса, отсчитываемая от точки A. В формуле (5) выбирается знак «–», так как, согласно рис. 5, угол наклона вектора скорости θ при $\mu > 1$

уменьшается вниз по потоку. Для решения этой задачи используются методы теории функций комплексного переменного, аналогичные [5].

Уравнение равновесия, выраженное с помощью дифференциала дуговой абсциссы, в интегральной форме выглядит следующим образом:

$$\theta(\sigma)-\theta_A=-\pi\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\sigma}\left((\mu-1)\frac{V_0}{V}+\frac{V}{V_0}\right)\times$$

$$\times\frac{1+ch\,\pi\delta}{\left(ch\,\pi\sigma+ch\,\pi\delta\right)^2}sh\,\pi\sigma d\sigma \qquad (6)$$

Задача решается с помощью функции Жуковского

$$\omega=i\,ln\frac{1}{V_0}\frac{dW}{dZ}=\theta+i\tau$$

с граничными условиями:

– $\mathrm{Re}\,\omega=0$ на GDA;

– $\mathrm{Re}\,\omega=-\pi/2$ на FG;

– $\mathrm{Im}\,\omega=0$ на CF;

– уравнение (6) на AC.

Были разработаны два численно-аналитических метода. В первом из них использован стенной ряд, во втором – интеграл Шварца.

Численно задача решалась методом коллокаций. Получаемая система нелинейных уравнений решалась методом Ньютона с регулированием шага путем минимизации суммы квадратов невязок по всем уравнениям. Координаты точек границы и внутренних точек потока определялись численным интегрированием. При решении исследовано поведение безразмерных параметров:

– коэффициентов давления

$$C_x=\frac{2}{\rho V_0^2 l}Im\int_{AC}\left(P(Z)-P_0\right)dZ=$$

$$=\frac{\varphi^*}{\lambda}\left(cos\,\theta_A-cos\,\theta_B\right);$$

$$C_y=\frac{2}{\rho V_0^2 l}Re\int_{AC}\left(P(Z)-P_0\right)dZ=$$

$$=\frac{\varphi^*}{\lambda}\left(sin\,\theta_A-sin\,\theta_B\right)+\mu;$$

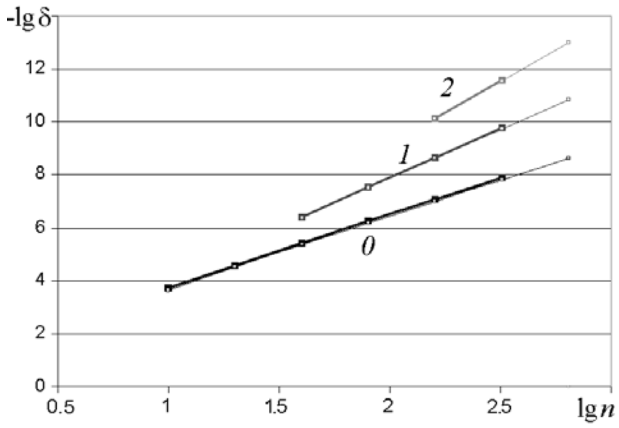
– натяжения $T^*=\dfrac{4T}{\rho V_0^2 l\mu}=\dfrac{2R_0}{l}$;

– высоты оболочечной конструкции

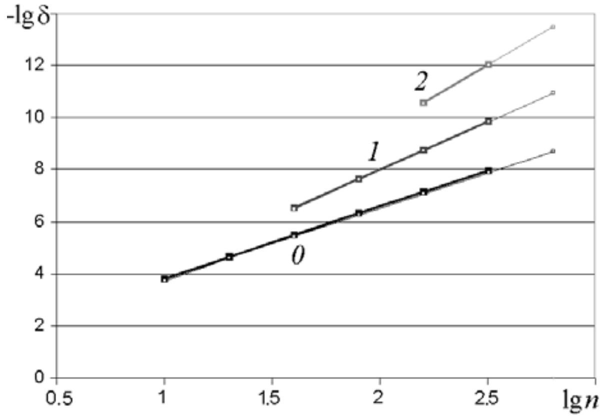
$$H^*=\frac{H}{l}=\begin{cases}\min\limits_{-\pi/2\le\sigma\le0}Y(\sigma)/l, & \theta_C<0;\\ \left(R_0+Y_0\right)/l, & \theta_C\ge0.\end{cases}$$

Для оценки погрешности использовалась численная фильтрация результатов расчетов, полученных при различных числах точек коллокаций. Результаты фильтрации изображены на рис. 5.

Данные результаты показывают, что для приведенных вариантов параметры C_X, C_Y и T^* определяются с относительной погрешностью около 10^{-12}, параметр H^* около 10^{-14}.



а



б

Рис. 5. Оценка погрешности параметров:
а – C_X, б – C_X *для* K = 1 *(число кавитации)*

Fig. 5. The error estimate of the parameters:
a – C_X, *b* – C_X *for* K = 1 *(the cavitation number)*

Таким образом, в данной работе с помощью видоизмененного метода Леви–Чивиты проведено численное решение задачи о кавитационном обтекании оболочки потоком идеальной жидкости. Исследование показало, что зависимости многих параметров от положения точки отрыва имеют локальные экстремумы при выполнении условия гладкого отрыва. Наличие двух методов решения одной задачи позволяет сравнить и проверить непротиворечивость полученных результатов и их оценок погрешности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как видно в работе, разработанная эвристическая методика многокомпонентного анализа позволяет получить достоверные оценки полученных результатов, и на их основании делать практические выводы о моделируемых явлениях. Применение технологии фильтрации численных результатов позволяет делать выводы с высокой точностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Житников В. П., Шерыхалина Н. М.** Моделирование течений весомой жидкости с применением методов многокомпонентного анализа. Акад. Наук Респ. Башкортостан, Отделение техн. наук. Уфа: Гилем, 2009. 335 с. [V. P. Zhitnikov, N. M. Sherykhalina, *Weighty fluid flows modeling by multicomponent analysis methods*, (in Russian). Ufa: Gilem, 2009.]

2. **Sherykhalina N. M., Zhitnikov V. P.** Application of extrapolation methods of numerical results for improvement of hydrodynamics problem solution // Computational Fluid Dynamics Journ. 2001. Vol. 10, no. 3. Pp. 315-323 [N. M. Sherykhalina, V. P. Zhitnikov, "Application of extrapolation methods of numerical results for improvement of hydrodynamics problem solution", in *Computational Fluid Dynamics Journ*., vol. 10, no. 3, pp. 315-323, 2001.]

3. **Соколова А. А.** Альтернативный метод решения задачи о солитоне Стокса как доказательство ранее полученных оценок погрешности // Современные проблемы математического моделирования, обработки изображений и параллельных вычислений, 2017 (СПММОИиПВ-2017): труды Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 4–11 сентября 2017 г.). Том I; Донской гос. техн. ун-т. – Ростов-на-Дону: ООО «ДГТУ-Принт», 2017. С. 253–260. [A. A. Sokolva, "An alternative method for solving the Stokes soliton problem as a proof of previously obtained error estimates", (in Russian), in *Proc. on Modern problems of mathematical modeling, image processing and parallel computing*, vol. 1, pp. 253-260, 2017.]

4. **Гуревич М. И.** Теория струй идеальной жидкости — М.: Наука, 1979. 536 с. [M. I. Gurevich, *Ideal fluid jets theory*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1979.]

5. **Житников В. П., Житникова Н. И., Поречный С. С.** Экстремальные свойства гидродинамических характеристик отрывного обтекания гибкой воздухоопорной оболочки вблизи экрана // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. СПб, 2013. 2 (169). С. 55–62. [V. P. Zhitnikov, N. I. Zhitnikova, S. S. Porechny, "Extreme properties of hydrodynamic characteristics of a detached flow around a flexible air-supported shell near the screen", (in Russian), in *Naucno-tecnicheskie vedomosti SPbGPU. Informatika. Telekommunikacii. Upravlenie*, 2 (169)., pp. 55–62, 2013.]

6. **Многокритериальная** задача доставки грузов различным потребителям / Н. И. Юсупова [и др.] // Логистика и управление цепями поставок. 2011. № 5 (46). С. 60–81. [N. I. Yusupova, *et al*. "The multicriteria problem of delivering goods to various consumers", (in Russian), in *Logistics and supply chain management*, 5 (46), pp. 60-81, 2011**.**]

ОБАВТОРАХ

ЖИТНИКОВ Владимир Павлович, проф. каф. Вычислительной математики и кибернетики. Дипл. инж.- физик (МФТИ, 1973). Д-р физ.-мат. наук по механике жидкости, газа и плазмы (КазГУ, 1993). Иссл. в обл. мат. мод. течений жидкости и электрохимического формообразования, численно-аналитических методов, методов оценки погрешности и обоснования достоверности численных результатов.

ШЕРЫХАЛИНА Наталия Михайловна, проф. каф. Вычислительной математики и кибернетики. Дипл. инж.-системотехник (УГАТУ, 1993). Д-р техн. наук по мат. мод., числ. мет. и компл. программ (УГАТУ, 2012). Иссл. в обл. мат. мод. течений жидкости и электрохимического формообразования, численных методов и оценок погрешности.

ФЕДОРОВА Галина Ильясовна, доц. каф. Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем. Дипл. инженер-математик (УГАТУ, 2000). Канд. физ.-мат. наук по мат. мод., числ. мет. и компл. программ (УГАТУ, 2004). Иссл. в обл. мат. мод. процессов электрохимического формообразования.

СОКОЛОВА Александра Алексеевна, асс. каф. ВМиК. Дипл. информатик-математик (УГАТУ, 2014). Готовит дис. о мат. мод. течений жидкости и электрохимического формообразования с использованием методов численной фильтрации.

METADATA

Title: The qualitative improvement methodology of the computational experiment results.

Authors: V. P. Zhitnikov[1], N. M. Sherykhalina[2], G. I. Fedorova[3], A. A. Sokolova[4].

Affiliation:

Ufa State Aviation Technical University (USATU), Russia.

Email: [1]zhitnik@mail.ru, [2]n_sher@mail.ru, [3]g_fed@mail.ru, [4]alexandrakrasich@gmail.com

Language: Russian.

Source: SIIT (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 3, no. 1 (5), pp. 58-64, 2021. ISSN 2686-7044 (Online), ISSN 2658-5014 (Print).

Abstract: In this paper, the effectiveness of the method of qualitative improvement of the computational experiment results is clearly demonstrated. By the example of solving problems of hydrodynamics, it is shown that there is a significant increase in the reliability of the created complexes for solving problems with applying certain approaches. The numerical filtration of the results of calculations makes it possible to achieve their high accuracy. The developed heuristic method of multicomponent analysis allows us to obtain reliable estimates of the results, and to make practical conclusions on their basis about the simulated phenomena.

Key words: multicomponent analysis; numerical-analytical methods; error estimate; numerical filtration.

About authors:

ZHITNIKOV, Vladimir Pavlovich, Prof., Dept. Computational Mathematics and Cybernetics, Faculty of Computer science and robotics, (USATU). Dipl. Physical engineer (MIPT, 1973). Dr. of Phis.-Math. Sci. (Kazan State Univ., 1993).

SHERYKHALINA, Nataliya Mikhailovna, Prof., Dept. Computational Mathematics and Cybernetics, Faculty of Computer science and robotics, (USATU). Dipl. System engineer (USATU, 1993). Dr. of Tech. Sci. (USATU, 2012).

FEDOROVA, Galina Ilyasovna, Docent, Dept. of High-performance computing technologies and systems, Common Science Faculty, (USATU). Dipl. Mathematics engineer (USATU,2000). Cand. of Phis.-Math. Sci. (USATU, 2004).

SOKOLOVA, Aleksandra Alekseevna, Postgrad. (PhD) Student, Dept. Computational Mathematics and Cybernetics, Faculty of Computer science and robotics, (USATU). Dipl. Computer scientist-mathematician (USATU,2014).