

УДК 51-75 + 004.428.4

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ СТРАХОВЫХ РЕЗЕРВОВ ПО ДОГОВОРАМ ДОЛГОСРОЧНОГО СТРАХОВАНИЯ ЖИЗНИ

Е. И. Прокудина<sup>1</sup>, Д. А. Фазлыева<sup>2</sup>

<sup>1</sup> preliv@gmail.com, <sup>2</sup> darina.air@gmail.com

<sup>1</sup> ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

<sup>2</sup> ООО ИК СИБИНТЕК

*Поступила в редакцию 30 июля 2021 г.*

**Аннотация.** Залогом успешной работы страховой компании является адекватное и обоснованное определение таких показателей как страховая премия и страховой резерв по договорам страхования, предлагаемым компанией. Рассмотрена задача оценки страхового резерва для определенных видов договоров добровольного долгосрочного страхования жизни. К нахождению страхового резерва для одного договора страхования применен подход, основанный на методологии динамического финансового анализа. Построена динамическая стохастическая модель функционирования страховой компании с учетом случайности предъявления требований и инвестирования капитала компании в акции, облигации и депозит. Разработан алгоритм вычисления сначала страховой премии, а затем страхового резерва при заданной вероятности выполнения компанией своих обязательств по договору. Экономические и демографические факторы имитируются, как случайные величины в соответствии с построенными эмпирическими законами распределения. Разработано программное обеспечение, реализующее данный алгоритм, с помощью которого можно оперативно производить расчеты страховых резервов.

**Ключевые слова:** математическое моделирование; метод Монте–Карло; программное обеспечение; страховой резерв; страхование жизни.

### ВВЕДЕНИЕ

Под страховым резервом по договору страхования жизни будем понимать величину обязательств страховщика, связанных с осуществлением предстоящих страховых выплат по данному договору, спустя некоторое время после его заключения при условии, что он еще действует.

Такого рода резервы используются, например, для определения суммы, которую нужно выплатить страхователю, если он досрочно прерывает договор; для вычисления новой величины страховой выплаты или страховой премии при изменении условий или даже вида договора; для оценки бонусной ставки для договоров с прибылью; для

расчетов, связанных с распределением прибыли [1, 2].

Для решения задачи нахождения величины страховых резервов по договору страхования жизни с учетом инвестирования целесообразно разработать соответствующее математическое и программное обеспечение, что будет способствовать стабильности работы страховой компании.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дано: условия договора страхования жизни; возраст застрахованного, в котором заключается договор; параметры функционирования страховой компании; таблица

продолжительности жизни; временные ряды экономических показателей.

Требуется найти страховые резервы для каждого года действия рассматриваемого договора.

Для нахождения страхового резерва прежде всего необходимо для данного договора страхования жизни вычислить страховую премию.

Данная статья продолжает серию работ, начатую с [3], связанных с применением динамического финансового анализа и подхода Asset-Liability Management (ALM). В основе динамического финансового анализа – генерирование стохастических сценариев развития страховой компании и их тестирование на соответствие целям компании [4]. ALM используется для моделирования среднесрочного и долгосрочного развития всех активов и пассивов компании при условии, что страховая компания должна достичь двух целей одновременно: доступный капитал должен инвестироваться как можно более выгодно, и в то же время должны выполняться обязательства перед страхователями [5, 6].

Для решения задачи нахождения страховой премии используем математическую модель функционирования страховой компании [7], описывающую процессы внесения премий, выплат и ведение активной инвестиционной деятельности (эффективное вложение всех собранных премий за год в финансовые активы и расчет полученного дохода), основанную на динамическом финансовом анализе, хотя он, как правило, применяется к имущественному страхованию, а в страховании жизни преимущественно используют подход ALM в основном с детерминированными элементами [4].

Состояние компании в построенной в [7] модели в каждый дискретный момент времени  $t$  характеризуется оценкой вероятности разорения компании  $P(U_t < 0)$ , где  $U_t$  – величина капитала компании в момент времени  $t$ , зависящая от премии. В качестве оценки страховой премии по договору принимается минимальное значение капитала, при котором вероятность разорения не превышает некоторую заданную величину  $\alpha$ .

Построим аналогичную модель функционирования страховой компании для вычисления страховых резервов.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ

Рассматриваются следующие виды договоров добровольного долгосрочного страхования жизни:  $n$ -летнее чисто накопительное страхование,  $n$ -летнее временное страхование и смешанное страхование.

$n$ -летнее чисто накопительное страхование. Страховая сумма  $S$  выплачивается человеку, заключившему договор в возрасте  $x$  лет в случае, если он доживет до  $x + n$  лет.

$n$ -летнее временное страхование жизни. Страховая сумма  $S$  выплачивается наследникам человека, заключившего договор в возрасте  $x$  лет, в случае его смерти в возрасте от  $x$  до  $x + n$  лет.

$n$ -летнее смешанное страхование жизни. Страховая сумма  $S$  выплачивается наследникам человека, заключившего договор в возрасте  $x$  лет, в случае его смерти в возрасте от  $x$  до  $x + n$  лет, или самому человеку, если он доживет до  $x + n$ .

*Допущения математической модели.*

1. Рассмотрим дискретную модель, в которой как время  $t$ , так и возраст  $x$  застрахованного принимают целые неотрицательные значения (в годах).

2. Рассмотрим популяцию из  $N$  человек. Каждый участник заключает страховой договор в момент  $t = 0$  в возрасте  $x$ , согласно которому:

– взнос каждого участника  $P$  вносится в начале каждого года весь срок действия договора;

– выплаты по обязательствам осуществляются в конце года смерти.

3. Риски по договорам независимы.

4. Полученные деньги страховая компания инвестирует в акции, облигации и депозиты, по которым получает определенный доход  $I_t$ .

5. Учитывается 4 основных вида расходов: инкассационные, аквизиционные, ликвидационные, управленческие.

*Математическая модель.*

Величина убытка  $L_t$  отражает финансовое состояние компании в момент времени  $t$ .

Значение страхового резерва  $C_t$  в момент  $t$  будем находить из условия, что в этот момент времени убыток по портфелю договоров не будет превышать значение резерва с вероятностью  $\beta$  достаточно близкой к 1:

$$P(L_t \leq C_t) \geq \beta.$$

Ниже представлены формулы вычисления убытка  $L_t$  для рассматриваемых видов договоров страхования жизни.

–  $n$ -летнее чисто накопительное страхование.

В каждый момент времени  $t$ , кроме последнего, убыток рассчитывается по формуле:

$$L_t = L_{t-1} - N_t^p P - I_t + A_t,$$

где  $I_t$  – доход от инвестирования средств на начало года  $t$ ;  $N_t^p$  – количество застрахованных, доживших до года  $t$ ;  $P$  – страховая премия по договору;  $A_t$  – совокупные расходы по договорам страхования.

В момент времени  $t = n$ , который равен моменту окончания действия договора, к величине убытка прибавляются выплаты дожившим до этого момента людям, в этот же момент перестают выплачиваться страховые премии:

$$L_n = L_{n-1} - I_n + A_n + S N_n^p (1 + \pi_t)^n,$$

где  $1 + \pi_t$  – норма инфляции.

–  $n$ -летнее временное страхование.

В каждый момент времени  $t \neq n$  убыток рассчитывается по формуле:

$$L_t = L_{t-1} - N_t^p P - I_t + A_t + S N_t^q (1 + \pi_t)^t,$$

где  $N_t^q$  – количество застрахованных, умерших за год  $(t-1, t]$ .

В момент времени  $t = n$  величина убытка равна:

$$L_n = L_{n-1} - I_n + A_n + S N_n^q (1 + \pi_t)^n.$$

– Смешанное страхование.

Смешанное страхование объединяет описанные выше виды договоров.

В каждый момент времени  $t \neq n$  убыток рассчитывается по формуле:

$$L_t = L_{t-1} - N_t^p P - I_t + A_t + S N_t^q (1 + \pi_t)^t.$$

В момент времени  $t = n$ , то есть в момент завершения договора, к величине убытка прибавляются выплаты дожившим до этого момента людям:

$$L_n = L_{n-1} - I_n + A_n + S N_n^q (1 + \pi_t)^n + S N_n^p (1 + \pi_t)^n.$$

Рассмотрим вычисление составляющих убытка отдельно.

Доход от инвестирования свободных средств в акции, облигации и депозит в момент времени  $t$  находится по формуле:

$$I_t = \alpha_{t-1} U_{t-1} r_{акц\ t-1} + \beta_{t-1} U_{t-1} r_{обл\ t-1} + (1 - \alpha_{t-1} - \beta_{t-1}) U_{t-1} r_{депозит\ t-1},$$

где  $\alpha_{t-1}$  – доля инвестирования денежных средств в акции в момент времени  $t-1$ ;  $\beta_{t-1}$  – доля инвестирования денежных средств в облигации в момент времени  $t-1$ ;  $1 - \alpha_{t-1} - \beta_{t-1}$  – доля инвестирования денежных средств в депозит в момент времени  $t-1$ ;  $r_{акц\ t-1}$  – доходность акций;  $r_{обл\ t-1}$  – доходность облигаций;  $r_{депозит\ t-1}$  – ставка банковских депозитов, соответствующая году  $[t-1, t)$ .

Расходы компании в момент времени  $t$  вычисляются следующим образом:

$$A_t = a_1 N_t^p P + a_2 + a_3 N_t^q + a_4,$$

где  $a_1$  – норма инкассационных расходов на одного застрахованного;  $a_2$  – аквизиционные расходы;  $a_3$  – норма ликвидационных расходов на одного умершего;  $a_4$  – управленческие расходы.

Поскольку аналитически определить величину резерва достаточно сложно, предлагается оценивать величину резерва на основе метода Монте-Карло. Схема вычислений представлена на рис. 1.

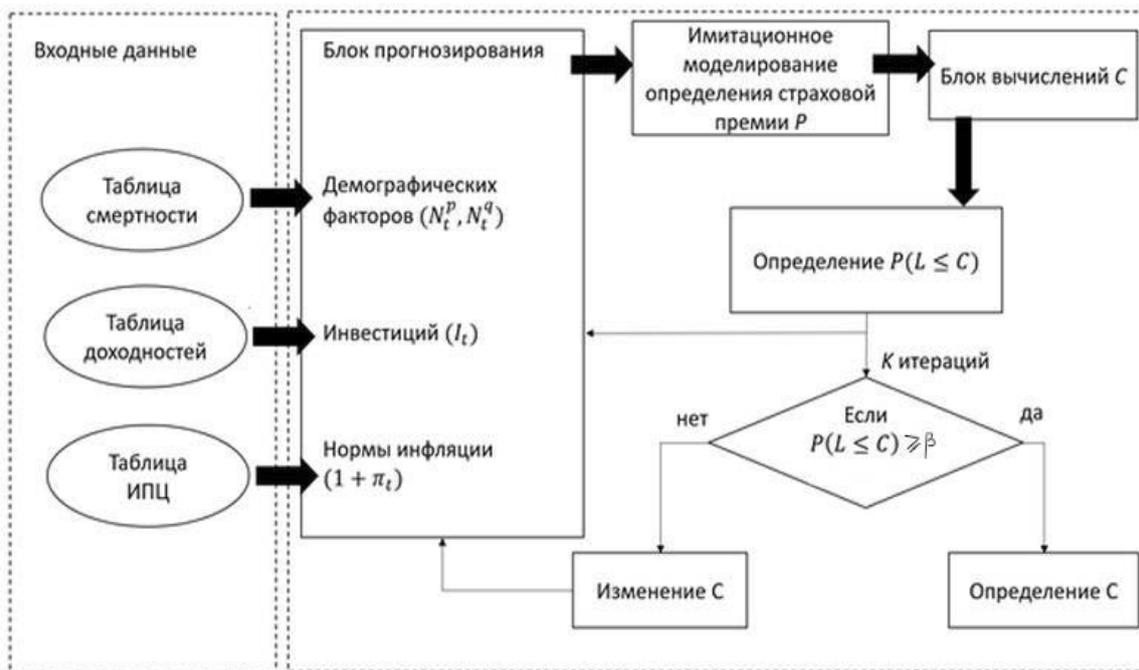


Рис. 1. Схема расчета страхового резерва

*Моделирование доходностей ценных бумаг.*

*Доходности акций и облигаций.*

Доходности акций и облигаций имитируются, как случайные величины в соответствии с построенными эмпирическими законами распределения. А именно, на основе временных рядов доходностей финансовых инструментов строятся эмпирические законы распределения доходностей. Затем разыгрываются значения доходностей в соответствии с построенными законами распределения.

*Ставка депозита.*

Ставка депозита находится как среднее значение доходностей некоторого множества банковских ставок.

*Нормы инфляции.*

Для моделирования инфляции используется метод ресамплинга [8]. Исходные данные – ежемесячные значения индекса потребительских цен (ИПЦ). Начальная выборка значений индекса потребительских цен делится на 12 подвыборок. В каждой из них значения индекса для каждого месяца соответственно. Из каждой подвыборки случайным образом выбирается одно значение индекса потребительских цен. Годовая инфляция является произведением 12 слу-

чайно отобранных значений индекса потребительских цен.

*Моделирование демографических факторов.*

Округленное остаточное время жизни  $K(x)$  каждого застрахованного является случайной величиной, принимающей целые неотрицательные значения.

Вероятность того, что человек в возрасте  $x$  лет скончается в интервале возрастов от  $x+t$  до  $x+t+1$  рассчитывается по формуле:

$$P(K(x) = t) = (l_{x+t} - l_{x+t+1}) / l_x,$$

где  $l_x, l_{x+t}, l_{x+t+1}$  – средние числа новорожденных, доживших до  $x, x+t, x+t+1$  лет соответственно (находятся по таблице смертности).

На основе закона распределения округленного остаточного времени жизни разыгрывается значение продолжительности жизни каждого застрахованного и подсчитывается численность живых и умерших в каждый момент времени  $t$  ( $N_t^p, N_t^q$ ).

## ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Для реализации программного обеспечения использовался язык программирования C# (среда разработки Visual Studio 2019).

Microsoft Visual Studio дает возможность создавать приложения и пользовательские интерфейсы Windows с помощью Windows Forms и Windows Presentation Foundation (WPF), приложений-служб Windows и консольных приложений.

Результат работы программного обеспечения представлен на рис. 2 при следующих значениях входных статистических данных:

- таблица смертности населения России 2014 года [9];
- ежемесячные значения доходностей акций и облигаций (с июня 2016 года по июнь 2020 года) [10, 11];
- ставки депозитов [12];
- ежемесячные значения ИПЦ (с января 1991 года по декабрь 2019 года) [13].

Остальные значения параметров представлены на рисунке.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена динамическая стохастическая модель функционирования страховой компании, учитывающая инвестиционный доход страховщика, позволяющая вычислять страховые резервы для трех видов договоров долгосрочного страхования жизни. Разработано программное обеспечение, обладающее следующими функциями: моделирование нормы инфляции, доходностей ценных бумаг, остаточного времени жизни; решение задачи оценки страховых резервов. Получены числовые результаты для заданных входных данных.

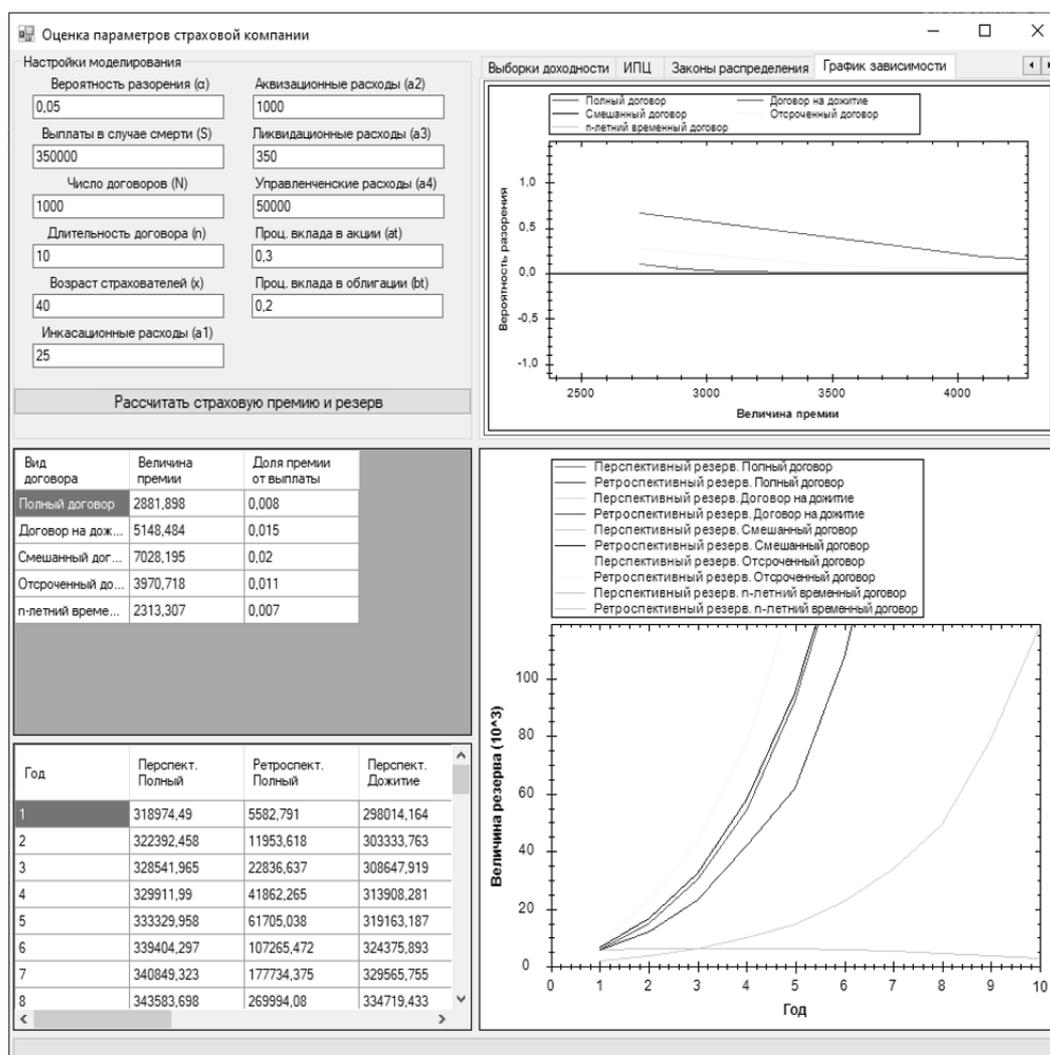


Рис. 2. Результат работы ПО

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Scott W. F.** Life Contingencies (part A2). Edinburgh: Heriot-Watt University, 1996. 184 p.
2. **Бронштейн Е. М., Прокудина Е. И.** Основы актуарной математики. Страхование жизни и пенсионные схемы: учебное пособие. Уфа: УГАТУ, 2002. 132 с. [ E. M. Bronshteyn, E. I. Prokudina, "Foundations of actuarial mathematics. Life Insurance and Pension Schemes: A Study Guide", (in Russian). Ufa: UGATU, 2002. ]
3. **Alimguzhina R. R., Imaev V. M., Prokudina E. I.** Application of Dynamic Financial Analysis in the Investigation of Reinsurance Appropriateness // Proc. 7th International Workshop on Computer Science and Information Technologies. Ufa: UGATU, 2005. Vol. 3. Pp. 259-262.
4. **Prokudina E. I., Zainasheva D. R.** Simulation and Analysis of Some Characteristics of Life Insurance Contract // Proc. 15th Workshop on Computer Science and Information Technologies CSIT'2013, (Budapest – Bratislava – Vienna). 2013. Vol. 2. Pp. 86-88.
5. **Kaufmann R., Gadmer A., Klett R.** Introduction to Dynamic Financial Analysis // ASTIN Bulletin. 2001. Vol. 31, no. 1. Pp. 213-249.
6. **Asset-Liability Management for Long-Term Insurance Business** / H. Albrecher, et al. 2017. [Электронный ресурс]. URL: [https://serval.unil.ch/resource/serval:BIB\\_FB98C45289A9.P001/REF.pdf](https://serval.unil.ch/resource/serval:BIB_FB98C45289A9.P001/REF.pdf) (дата обращения 10.03.2021). [ H. Albrecher, et al. (2021, Mar. 10). *Asset-Liability Management for Long-Term Insurance Business* [Online], (in Russian). Available: [https://serval.unil.ch/resource/serval:BIB\\_FB98C45289A9.P001/REF.pdf](https://serval.unil.ch/resource/serval:BIB_FB98C45289A9.P001/REF.pdf) ]
7. **IAA** (International Actuarial Association) RiskBook. [Электронный ресурс]. URL: [https://www.actuaries.org/iaa/IAA/Publications/iaa\\_riskbook/IAA/Publications/risk\\_book.aspx](https://www.actuaries.org/iaa/IAA/Publications/iaa_riskbook/IAA/Publications/risk_book.aspx) (дата обращения 3.03.2021). [ IAA (International Actuarial Association) RiskBook (2021, Mar. 03). [Online]. Available: [https://www.actuaries.org/iaa/IAA/Publications/iaa\\_riskbook/IAA/Publications/risk\\_book.aspx](https://www.actuaries.org/iaa/IAA/Publications/iaa_riskbook/IAA/Publications/risk_book.aspx) ]
8. **Lifecycle Investing, Holding Periods, and Risk** / K. Hickman, et al. // The Journal of Portfolio Management. 2001. Vol. 27, no. 2. Pp. 101-111.
9. **Демоскоп Weekly**. [Электронный ресурс]. URL: [http://www.demoscope.ru/weekly/ssp/rus\\_ltmnu.php](http://www.demoscope.ru/weekly/ssp/rus_ltmnu.php) (дата обращения 12.04.2021). [ Demoscope Weekly (2021, Apr. 12). [Online]. Available: [http://www.demoscope.ru/weekly/ssp/rus\\_ltmnu.php](http://www.demoscope.ru/weekly/ssp/rus_ltmnu.php) ]
10. **Россия – акции**. [Электронный ресурс]. URL: <https://ru.investing.com/equities/russia> (дата обращения 15.04.2021). [ Russia - stocks (2021, Apr. 15). [Online]. Available: <https://ru.investing.com/equities/russia> ]
11. **Россия – государственные облигации**. [Электронный ресурс]. URL: <https://ru.investing.com/ratesbonds/russia-government-bonds> (дата обращения 15.04.2021). [ Russia - government bonds (2021, Apr. 15). [Online]. Available: <https://ru.investing.com/rates-bonds/russia-government-bonds> ]
12. **Банк России**. [Электронный ресурс]. URL: <https://cbr.ru/statistics/avgprocstav/> (дата обращения 20.04.2021). [ Bank of Russia (2021, Apr. 20). [Online]. Available: <https://cbr.ru/statistics/avgprocstav/> ]
13. **Федеральная служба государственной статистики**. [Электронный ресурс]. URL: <https://rosstat.gov.ru> (дата обращения 20.04.2021). [ Federal State Statistics Service (2021, Apr. 20). [Online]. Available: <https://rosstat.gov.ru> ]

## ОБ АВТОРАХ

**ПРОКУДИНА Елена Ивановна**, доц. каф. вычислительной математики и кибернетики. Дипл. математик (БашГУ, 1984). Канд. физ.- мат. наук по прим. выч. техн., мат. мод. и мат. мет. в науч. исследованиях (защ. в БашГУ, 1993). Иссл. в обл. математического моделирования, актуарной математики, теории риска.

**ФАЗЛЫЕВА Дарина Айратовна**, инженер-программист. Магистр мат. обесп. и админ. ин-форм. систем (УГАТУ, 2021).

## METADATA

**Title:** Mathematical and software support for the problem of assessing insurance reserves under long-term life insurance contracts.

**Authors:** E. I. Prokudina<sup>1</sup>, D. A. Fazlyeva<sup>2</sup>

**Affiliation:**

<sup>1</sup>Ufa State Aviation Technical University (USATU), Russia.

<sup>2</sup>LLC IC SIBINTEK, Russia.

**Email:** <sup>1</sup>preliv@gmail.com, <sup>2</sup>darina.air@gmail.com

**Language:** Russian.

**Source:** SIIT (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 3, no. 3 (7), pp. 53-58, 2021. ISSN 2686-7044 (Online), ISSN 2658-5014 (Print).

**Abstract:** The key to the successful work of an insurance company is an adequate and reasonable determination of such indicators as insurance premiums and insurance reserves under insurance policies offered by the company. The problem of estimating the insurance reserves for certain types of voluntary long-term life insurance policies is considered in the article. An approach based on the dynamic financial analysis is applied to finding the insurance reserve for one insurance policy. A dynamic stochastic model of the functioning of an insurance company has been built, considering the randomness of claims and the investment of the company's capital in shares, bonds and deposits. An algorithm has been developed for calculating first the insurance premium, and then the insurance reserve for a given probability of the company fulfilling its obligations under the policy. Economic and demographic factors are simulated as random variables in accordance with the constructed empirical distribution laws. Software for calculation of insurance reserves has been developed.

**Key words:** math modeling; Monte Carlo method; software; insurance reserve; life insurance.

**About authors:**

**PROKUDINA, Elena Ivanovna**, Docent., Dept. of Computational Mathematics and Cybernetics. Dipl. Mathematics (BashSU, 1984). Cand. of Phis.-Math. Sci. (BashSU, 1993).

**FAZLYEVA, Darina Airatovna**, Software engineer, Master of Software and Administration of Information System (USATU, 2021).